VWLer-Mathe für Minimalisten

von Ralf-M. Marquardt

Ein Mathe-Vorspann in einem Fach, in dem der Prof eine „Über-Mathematisierung“ seiner Wissenschaft beklagt? Wie passt das zusammen?

Ganz einfach: Beklagt wird von mir **erstens** nur die „**Über**-Mathematisierung“. Schließlich ist die VWL eine Sozialwissenschaft, also eine Wissenschaft, die das Verhalten von Menschen im Bereich der Ökonomie erklären will. Und Menschen verhalten sich nicht scharf kalkulierbar. Ungeachtet dessen vermittelte der Mainstream zunehmend den Eindruck, VWL habe Züge einer Naturwissenschaft. Die Rede ist hier von „Gesetzen“, die man wie ein unumstößliches Naturgesetz, zur Kenntnis zu nehmen habe und die dann nur noch eine wirtschaftspolitische Schlussfolgerung zulieẞen. Dieser Anstrich wird untermauert durch das Verwenden mathematischer Formeln.

Zugleich verbirgt sich hinter der Mathematisierung auch die heimliche Sehnsucht der Ökonomen-Zunft, wissenschaftlich nicht „im Trüben fischen zu müssen“, methodisch ernst genommen zu werden und zu genauso präzisen Ergebnissen zu gelangen wie ihre technisch-naturwissenschaftlichen Kollegen*innen.

Die große Gefahr dieses Vorgehens besteht im Realitätsverlust und im „**Modellplatonismus**“. Denn die unbestrittene wissenschaftliche Eleganz der Erkenntnisgewinnung verleitet schnell zu einem Verhalten, wonach nicht sein kann, was nicht sein darf, nämlich dass das Modell – möglicherweise schon in seinen Annahmen – untauglich oder allenfalls begrenzt in der Lage zur Erklärung der Wirklichkeit ist.

Zweitens ist die Mathematik manchmal schon ein probates Hilfsmittel zur Entdeckung erster komplexer Erkenntnisse. Denn eine **ausgewogene Mathematisierung** hat den Vorteil, im Vorfeld zu einer präzisen Strukturierung der zu untersuchenden Problematik zu zwingen, Widersprüche in der Argumentation schonungslos offenzulegen und eindeutige Ergebnisse zu liefern. Anschließend müssen die Ergebnisse aber auch verbal erklärt, eingeordnet und plausibilisiert werden. Zudem ist eine kritische Distanz zum methodischen Ansatz genauso erforderlich wie die Fähigkeit zur realitätsnahen Relativierung der hergeleiteten Befunde.

Gerade in der Mikroökonomie geht es dabei nicht ohne Mathe, will man das Standardwissen verstehen. Das erforderliche Instrumentarium ist aber eigentlich recht eingeschränkt. Das gilt erst Recht, wenn man die Mathe im in der Vorlesung praktizierten Umfang auf ein Minimum reduziert. Man muss nur bereit sein, sich einmal darauf einzulassen.

Für diejenigen, die sich in der Mathematik nicht gefestigt fühlen, sollen hier ganz kurz die wichtigsten in der Vorlesung angewendeten Techniken in den Regeln (R-1) bis (R-13) aufgegriffen werden.

Puristen mögen verzeihen, dass dabei die mathematische Reinheit und Vollständigkeit bewusst einem Pragmatismus weichen musste; schließlich ist Mathe hier nur ein Hilfsmittel.

Arbeiten mit Potenzen

Beim Arbeiten mit **negativen Exponenten** gilt:

$\boldsymbol{A^{-\alpha} = \frac{1}{A^{\alpha}}}$ und entsprechend: $\boldsymbol{\frac{1}{A^{-\alpha}} = A^{\alpha}}$. **(R-1)**

Der negative Exponent bedeutet also nicht etwa, dass der Ausdruck negativ ist. Er ermöglicht nur eine alternative Darstellung, bei dem ein Wechsel eines Ausdrucks vom Zähler in den Nenner und umgekehrt erfolgen kann (wobei sich das Vorzeichen des Exponenten ändert).

Werden **Potenzen mit derselben Basis multipliziert**, kann alternativ die Basis mit der Summe der einzelnen Exponenten potenziert wird:

$\boldsymbol{A^{\alpha} \cdot A^{\beta}} = \underbrace{A \cdot A \ldots \cdot A}_{\substack{\alpha\text{-fach} \\ \text{der Faktor A}}} \cdot \underbrace{A \cdot A \ldots \cdot A}_{\substack{\beta\text{-fach} \\ \text{der Faktor A}}} = \boldsymbol{A^{(\alpha+\beta)}}$. **(R-2)**

Dies gilt aber nur bei der Multiplikation und nicht für Summen von Potenzen.

Die Regeln (R-1) und (R-2) lassen sich zum Beispiel wie folgt anwenden:

$$\frac{A^{-0,5} \cdot K^{0,5}}{A^{0,5} \cdot K^{-0,5}} = \frac{\overbrace{K^{0,5} \cdot K^{0,5}}^{=K^{(0,5+0,5)}}}{\underbrace{A^{0,5} \cdot A^{0,5}}_{=A^{(0,5+0,5)}}} = \frac{K}{A}.$$

Bei potenzierten Potenzen wird die Basis mit dem Produkt der Exponenten potenziert:
$\boldsymbol{(A^{\alpha})^{\beta} = A^{(\alpha \cdot \beta)}}$. **(R-3)**

Mit dieser Regel (R3) lässt sich etwa eine sogenannten Cobb-Douglas-Produktionsfunktion $y = f(A, K)$ in eine Isoquante der Gestalt $K = g(A, y)$ umformen:

Produktionsfunktion: $y = f(A, K) = 50 \cdot A^{0,5} \cdot K^{0,5} \Rightarrow K^{0,5} = \frac{y}{50 \cdot A^{0,5}}$.

Werden nun beide Seiten mit $(\frac{1}{0,5})$ potenziert, gilt nach (R3):

Isoquante: $(K^{0,5})^{\left(\frac{1}{0,5}\right)} = K^{\left(0,5 \cdot \frac{1}{0,5}\right)} = K = g(A, y) = \left(\frac{y}{50 \cdot A^{0,5}}\right)^{\overbrace{\frac{1}{0,5}}^{=2}}$

$$= \frac{y^2}{50^2 \cdot A^{0,5 \cdot 2}} = \frac{y^2}{2.500 \cdot A} = \frac{y^2}{2.500} \cdot A^{-1}.$$

Beim **Potenzieren mit 0** gilt für jede von Null verschiedene Basis:

$\boldsymbol{A^0 = 1}$ (für $A \neq 0$). **(R-4)**

Zum Beispiel gilt: $3{,}8654^0 = 2.000^0 = 1$.

Ein weit verbreiteter Fehler beim Umgang mit Potenzen betrifft die **Potenz einer Summe** (bzw. Differenz). Sie ist eben **nicht** die Summe (bzw. Differenz) der Einzelpotenzen:

$\boldsymbol{(A + K)^n \neq A^n + K^n}$ **(R-5)**

Zum Beispiel: $(A + K)^2 = (A + K) \cdot (A + K) = A^2 + 2AK + K^2 \neq A^2 + K^2$.

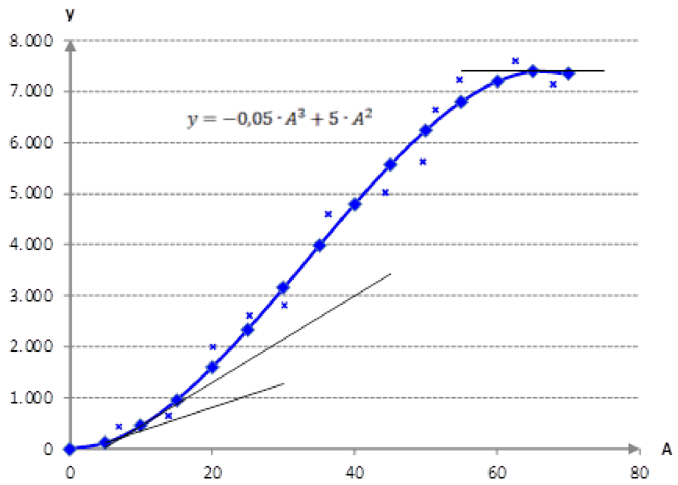
Arbeiten mit Ableitungen

Der Ableitungsbegriff spielt eine zentrale Rolle in der ökonomischen Analyse. Mit seiner Hilfe lassen sich Veränderungseffekte ermitteln, vor allem aber auch **Maxima** und **Minima** bestimmen. Letzteres ist ein zentraler Gegenstand der Ökonomie, wenn es darum geht, das **ökonomische Prinzip** zu verwirklichen.

… bei zweidimensionalen Funktionen

Beginnen wir mit einer zweidimensionalen Funktion, bei der sich eine **abhängige Variable**, y (hier der Ertrag), aus einer vorzugebenden **unabhängigen Variablen**, A (hier der Arbeitseinsatz), durch Anwenden einer Funktionsvorschrift, f, bestimmen lässt: $y = f(A)$. So könnte der Funktionszusammenhang zum Beispiel in einer sogenannten klassischen Ertragsfunktion lauten (vgl. Abbildung):

$$y = f(A) = \underbrace{-0{,}05 \cdot A^3}_{u(A)} + \underbrace{5 \cdot A^2}_{v(A)}. \tag{1}$$



Die Funktion $f(A)$ als ganzes besteht aus zwei miteinander addierten Teilfunktionen $u(A) = -0{,}05 \cdot A^3$ und $v(A) = 5 \cdot A^2$. Will man die Funktion $y = f(A)$ nach der unabhängigen Variablen A ableiten, also y' bilden, benötigt man Regeln. Dabei werden die folgenden vier **Regeln** besonders häufig angewendet:

(R-6)

Die **Summenregel** besagt:
$\boldsymbol{y = f(A) = u(A) + v(A) \Rightarrow y' = u' + v'}$.
Eine Funktion aus Summanden ist summandenweise abzuleiten. Es müsste in (1) demnach zuerst der Summand $u(A) = -0{,}05 \cdot A^3$ und dann der Summand $v(A) = 5 \cdot A^2$ abgeleitet werden.

(R-7)

Nach der **Faktorregel** gilt:
$\boldsymbol{y = c \cdot w(A) \Rightarrow y' = c \cdot w'}$.
Konstante Faktoren (hier: c) bleiben als solche erhalten. Im ersten Summanden von (1), also bei $u(A) = \underbrace{-0{,}05}_{c} \cdot \underbrace{A^3}_{w(A)}$, bleibt demnach der Faktor $c = -0{,}05$ beim Ableiten erhalten und muss mit der noch zu bestimmenden Ableitung des Potenzausdrucks (A^3) multipliziert werden.

Für die Ableitung des Potenzausdrucks wird die **Potenzregel** benötigt: **(R-8)**
$\boldsymbol{y = A^n \Rightarrow y' = n \cdot A^{(n-1)}}$.
Eine Potenz wird abgeleitet, indem der Exponent als Faktor vor die unabhängige Variable gezogen wird und anschließend der Exponent um 1 verkleinert wird. Die Ableitung von A^3 ist beispielsweise: $3 \cdot A^2$.

Aus (R-8) resultiert die **Ableitungsregel für eine Konstante**: **(R-9)**
$y = c = c \cdot \underbrace{A^0}_{=1} \Rightarrow y' = c \cdot 0 \cdot A^{-1} = 0.$
Die Ableitung einer Konstanten ist also Null.

Aus der Kombination der Regeln (R-6) bis (R-9) ergibt sich als **Ableitungsfunktion zu (1):**

$$y' = \frac{dy}{dA} = y_A = f'(A) = \overbrace{\underbrace{-0{,}05 \cdot 3}_{=-0{,}15} \cdot A^2}^{u'} + \overbrace{\underbrace{5 \cdot 2}_{=10} \cdot A^1}^{v'} \qquad (2)$$

$$= -1{,}5 \cdot A^2 + 10 \cdot A.$$

Dabei sind $\boldsymbol{y' = \frac{dy}{dA} = y_A = f'(A)}$ vier gängige Alternativen, um anzukündigen, dass y nach A abgeleitet werden soll. Die Ableitung in der Form $\frac{dy}{dA}$ nennt man auch den **Differential-quotienten**.

In der Ökonomie wird den Ableitungen zumeist ein Fachterminus zugewiesen, der mit der Vorsilbe „Grenz-" beginnt. Erfasst y den Ertrag ist $\frac{dy}{dA}$ der **Grenzertrag**, erfasst die abhängige Variable hingegen Kosten, liefert die Ableitung die **Grenzkosten** usw.

Nun hängt der Wert der Ableitungsfunktion in (2) davon ab, wie hoch A ist. Setzt man dort A = 10 ein, nimmt er zum Beispiel den Wert 85 an. Ein **Ableitungswert** gibt grundsätzlich das **Reaktionsausmaß** wieder und quantifiziert, wie sich die im Differentialquotienten (hier: $\frac{dy}{dA}$) oben stehende Variable (hier: y) näherungsweise verhält, wenn die unten stehende Variable (hier: A) um eine Einheit steigt bzw. fällt. Ist das **Vorzeichen** dabei

- *positiv*, entwickeln sich beide Größen *in dieselbe Richtung*,
- ist es *negativ* bewegen sie sich in *unterschiedliche Richtungen*.
- Bei einem Wert von *Null* liegt (zumeist) ein *Maximum* oder ein *Minimum* vor.

Der bei A = 10 gefundene Grenzertrag besagt mithin, dass die Erhöhung von A um eine Einheit (bzw. die Verringerung von A um eine Einheit) y näherungsweise um 85 Einheiten erhöht (bzw. verringert).

Zugleich steht der Ableitungswert für die **Steigung der Tangente**, die an die Funktion beim selbst vorgegebenen Wert für die unabhängige Variable angelegt wird (vgl. Abbildung).

Um ein **Maximum bzw. Minimum** zu finden, wird in der sogenannten „**notwendigen Bedingung**" üblicherweise die Funktion der ersten Ableitung Null gesetzt und dann nach der unabhängigen Variablen aufgelöst. Den Wert für A, hier A° genannt, der das Maximum des Ertrags in der Funktion aus (1) bewirkt, erhält man, indem für die erste Ableitung aus (2) vorgegeben wird:

$$\frac{dy}{dA} = -0{,}15 \cdot A^2 + 10 \cdot A \overset{!}{\triangleq} 0 \Rightarrow A^{\circ} = \frac{10}{0{,}15} \approx 66{,}67. \qquad (3)$$

Setzt man A° in (1) ein, erhalten wir den **maximalen Funktionswert** (hier: Ertrag) von $y^{\circ} \approx 7.407$. In der Abbildung sieht man, dass dort die Tangentensteigung (= Wert der ersten Ableitung) den Wert Null hat, also eine Horizontale ist.

Zur Differenzierung, ob ein Maximum oder ein Minimum gefunden wurde, muss an der Stelle, die nach der notwendigen Bedingung für ein Optimum gehalten wird, der Wert der zweiten Ableitung betrachtet werden. Die erhält man, wenn man die erste Ableitung (hier: (2)) noch einmal nach den genannten Regeln ableitet. Hier ergibt sich als zweite Ableitung in den üblichen Notationen:

$$\frac{d^2y}{dA^2} = y_{AA} = y'' = f''^{(A)} = -0{,}3 \cdot A + 10 \cdot \underbrace{A^0}_{=1} = -0{,}3 \cdot A + 10. \tag{4}$$

An der Stelle $A^{\circ} \approx 66{,}67$ resultiert als Wert: $\frac{d^2y}{dA^2}_{/A^{\circ} \approx 66{,}67} \approx -0{,}3 \cdot 66{,}67 + 10 \approx -10 < 0$.

Ist, wie hier, die zweite Ableitung negativ, liegt nach der sogenannten **hinreichenden Bedingung** ein **Maximum** vor, wäre der Wert hingegen positiv, hätten wir ein **Minimum** gefunden.

… bei mehrdimensionalen Funktionen

Etwas komplizierter gestaltet sich das Ableiten mehrdimensionaler Funktionen, bei denen eine **abhängige Variable**, y (hier der Ertrag), aus verschiedenen **unabhängigen Variablen**, zum Beispiel A (hier: Arbeitseinsatz) und K (hier: Kapitaleinsatz), durch Anwenden einer Funktionsvorschrift, f, bestimmen lässt: $y = f(A, K)$.

Offenbar kann y nach A oder nach K abgeleitet werden. Üblich ist dabei das **partielle Ableiten**, bei dem untersucht wird, wie der Funktionswert y reagiert, wenn sich nur eine der beiden abhängigen Variablen verändert und gleichzeitig die andere unabhängige Variable konstant gehalten wird.

Als Schreibweise für die partielle Ableitung von y nach A hat sich etabliert: $\boldsymbol{y_A}$ **oder** $\boldsymbol{\frac{\partial y}{\partial A}}$ (beachte: der Differentialquotient wird nun mit einem geschwungenen, griechischen ∂ dargestellt).

Greifen wir dazu erneut die obige Cobb-Douglas-Produktionsfunktion auf:

$$y = f(A, K) = 50 \cdot A^{0{,}5} \cdot K^{0{,}5}. \tag{5}$$

Beim partiellen Ableiten gelten die zuvor genannten Regeln. Zudem ist nun aber eine Besonderheit im Umgang mit solchen unabhängigen Variablen zu beachten, nach denen nicht abgeleitet wird. Sie werden ja beim partiellen Ableiten als konstant unterstellt und sind strukturell in der abzuleitenden Funktion auch als solche zu behandeln. Für die partielle Ableitung von (5) nach A wird K vorübergehend zu einer Konstanten „degradiert". Wenn aber K eine Konstante ist, ist aber auch $K^{0{,}5}$ eine Konstante. Und vor dem Ableiten nach A hat (5) die Struktur:

$$y = \underbrace{50}_{\text{Konstante}} \cdot A^{0{,}5} \cdot \underbrace{K^{0{,}5}}_{\text{Konstante}}. \tag{6}$$

Nun bleiben aber nach (R-7) die konstanten Faktoren (hier: 50 und $K^{0{,}5}$) beim Ableiten erhalten, so dass als Ableitungsfunktion zu (5) unter Berücksichtigen von (R-8) gilt:

$$y_A = \frac{\partial y}{\partial A} = 50 \cdot K^{0{,}5} \cdot 0{,}5 \cdot A^{(0{,}5-1)} = 25 \cdot A^{-0{,}5} \cdot K^{0{,}5} \overset{\text{(R-1)}}{\triangleq} 25 \cdot \frac{K^{0{,}5}}{A^{0{,}5}}. \tag{7}$$

Auch hier sind die Ableitungswerte davon abhängig, wie groß die unabhängigen Variablen (A, K) in der Ausgangssituation jeweils sind. An der Stelle $A_0 = 100$ und $K_0 = 100$ nimmt die partielle Ableitung zum Beispiel folgenden Wert an:

$$\frac{\partial y}{\partial A}_{/A_0=100,K_0=100} = 25 \cdot \frac{100^{0,5}}{100^{0,5}} = 25. \tag{8}$$

Die **Interpretation des Ableitungswertes** ist identisch zu der bei zweidimensionalen Funktionen. Das positive Vorzeichen besagt hier, dass sich die im Differentialkoeffizienten $\frac{\partial y}{\partial A}$ enthaltenen Variablen in dieselbe Richtung bewegen, wenn die andere unabhängige Variable, hier K, konstant bleibt. Erhöht (bzw. vermindert) sich ausgehend von $A_0 = 100$ und $K_0 = 100$ die unabhängige Variable A um eine Einheit, erhöht (vermindert) sich die abhängige Variable, hier y, näherungsweise um 25 Einheiten, sofern $K = K_0 = 100$ bleibt.

Bedenken Sie, dass folgende veränderte Funktion, in der die unabhängigen Variablen additiv verknüpft sind, eine andere Struktur beim Ableiten aufweist:

$$y = \underbrace{50}_{\substack{\text{Konstanter}\\\text{Faktor}\\\text{von A}}} \cdot A^{0,5} + \underbrace{K^{0,5}}_{\substack{\text{Konstanter}\\\text{Summand}\\\text{zu A}}}. \tag{9}$$

Während beim Ableiten nach A nach (R-7) konstante Faktoren (hier: 50) erhalten bleiben, verschwinden nach (R-9) konstante Summanden (hier: $\underbrace{K^{0,5}}$), so dass die Ableitungsfunktion zu (14) ist:

$$y_A = \frac{\partial y}{\partial A} = 50 \cdot 0,5 \cdot A^{(0,5-1)} = 25 \cdot A^{-0,5}. \tag{10}$$

… beim totalen Differential

Als letzte Regel, die häufiger in der Vorlesung angewendet wird, soll das totale Differential im Zusammenhang mit mehrdimensionalen Funktionen vorgestellt werden.

Angenommen, es liegt der Funktionszusammenhang $y = f(A, K) = 50 \cdot A^{0,5} \cdot K^{0,5}$ aus (5) zugrunde und wir starten mit den Ausgangswerten $A = A_0 = 100$ und $K = K_0 = 25$ für die unabhängigen Variablen. So erhält der Funktionswert ebenfalls einen Ausgangswert ($y = y_0$):

$$y_0 = f(A_0, K_0) = 50 \cdot 100^{0,5} \cdot 25^{0,5} = 2.500. \tag{11}$$

Nun sollen A und K gleichzeitig verändert werden. Zum Beispiel soll A um 2 Einheiten erhöht werden ($\Delta A = 2$) und K um 2 Einheiten verringert werden ($\Delta K = -2$). Die resultierende Veränderung in y (also Δy) kann nun auf zwei Wegen ermittelt werden.

Erstens wir setzen die veränderten Werte von $A_1 = A_0 + \Delta A = 100 + 2 = 102$ bzw. $K_1 = K_0 + \Delta K = 25 - 2 = 23$ in die Funktion ein und erhalten:

$$y_1 = f(A_1, K_1) = 50 \cdot 102^{0,5} \cdot 23^{0,5} \approx 2.422 \tag{12}$$

$$\Rightarrow \Delta y = y_1 - y_0 \approx 2.422 - 2.500 = -78.$$

Alternativ kann die Veränderung auch näherungsweise mit Hilfe des **totalen Differentials** berechnet werden:

$$y_0 = f(A_0, K_0) \Rightarrow \Delta y \approx \frac{\partial y}{\partial A}_{/A_0,K_0} \cdot \Delta A + \frac{\partial y}{\partial K}_{/A_0,K_0} \cdot \Delta K. \tag{R-10}$$

Zum Überprüfen bilden wir zunächst die partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial y}{\partial A}_{/A_0,K_0} = 50 \cdot 0{,}5 \cdot {A_0}^{-0{,}5} \cdot {K_0}^{0{,}5} = 25 \cdot 100^{-0{,}5} \cdot 25^{0{,}5} = 12{,}5 \qquad (13)$$

und

$$\frac{\partial y}{\partial K}_{/A_0,K_0} = 50 \cdot 0{,}5 \cdot {A_0}^{0{,}5} \cdot {K_0}^{-0{,}5} = 25 \cdot 100^{0{,}5} \cdot 25^{-0{,}5} = 50.$$

Einsetzen von (14) in (R-10) liefert:

$$\Delta y \approx \underbrace{12{,}5}_{=\frac{\partial y}{\partial A}_{/A_0,K_0}} \cdot \underbrace{2}_{=\Delta A} + \underbrace{50}_{=\frac{\partial y}{\partial K}_{/A_0,K_0}} \cdot \underbrace{(-2)}_{=\Delta K} = -75\,. \qquad (14)$$

In der Tat liegen die berechneten Werte aus (12) und (14) halbwegs dicht beisammen. Auch ist die Formel in (14) plausibel: Wenn pro Einheit mehr von A der Wert von y näherungsweise um $\frac{\partial y}{\partial A} = 12{,}5$ Einheiten steigt, bewirkt für sich genommen ein Zuwachs von A um 2 Einheiten, dass y ca. um $12{,}5 \cdot \underbrace{2}_{=\Delta A} = 25$ Einheiten zulegt. Wenn parallel ein Rückgang von K um eine Einheit y ungefähr um $\frac{\partial y}{\partial K} = 50$ Einheiten reduziert, bewirkt eine Verringerung von K um zwei Einheiten für sich genommen, dass y ca. um $50 \cdot \underbrace{(-2)}_{=\Delta K} = -100$ schrumpft. Unterm Strich resultiert als berechnete Verringerung: $\Delta y \approx 25 - 100 = -75$.

Allerdings kann das totale Differential die Veränderung eben nur näherungsweise richtig berechnen. Dafür lässt es aber erkennen, wie groß der Veränderungsbeitrag von *A* (+ 25) und *K* (-100) im Einzelnen ausfällt. Außerdem fällt der Unterschied umso geringer aus, je kleiner die die beabsichtigen Veränderungen in den unabhängigen Variablen sind. In den Analysen der Vorlesung (zum Beispiel zur Grenzrate der Substitution) wird das totale Differential zudem auch nicht zur Berechnung von konkreten Veränderungen angewendet (dazu ist es eigentlich zu aufwendig), sondern zum Entdecken von allgemeinen Zusammenhängen.

Arbeiten mit Wachstumsraten

Wachstumsraten (auch: „Veränderungsraten“) messen, **relative** Änderungen einer Größe gegenüber einem Ausgangswert.

Wenn beispielsweise der Preis eines Gutes in der Ausgangsperiode t =0 $p_0 = 200$ € betrug und eine Periode später in t = 1 bei $p_1 = 220$ € liegt, ist intuitiv klar, dass die Preise um 10 % gewachsen sind.

Der Rechnung liegt ein Dreisatz zugrunde:

$$p_0 = 200\,€ \triangleq 100\,\%$$

$$\Rightarrow p_1 = 220\,€ \triangleq \frac{220€ \cdot 100\%}{200€} = \frac{p_1}{p_0} \cdot 100\% = 110\%.$$

Die **in Prozent bemessene Wachstumsrate** des Preises W_p ergibt sich, indem man dann vom zuvor errechneten Prozentwert 100 % abzieht:

$$\boldsymbol{W_p} = \frac{p_1}{p_0} \cdot 100\% - 100\% = \frac{\overbrace{p_1 - p_0}^{=\Delta p}}{p_0} \cdot 100\% = \underbrace{\frac{\boldsymbol{\Delta p}}{\boldsymbol{p_0}}}_{=\omega_p} \cdot \mathbf{100\%} = \underbrace{\frac{20\,€}{200\,€}}_{\omega_p = 0{,}1} \cdot 100\% = 10\% \qquad \textbf{(R-11)}$$

Die Wachstumsrate kann dabei auch als **Dezimalzahl** $\omega_p = 0{,}1$ angegeben werden.

Zurückgeführt auf den **Wachstumsfaktor** $WF = 1{,}1$, mit dem die betrachtete Größe gewachsen ist, gilt alternativ:

$$\boldsymbol{\omega_p} = \frac{\overbrace{p_1 - p_0}^{\Delta p}}{p_0} = \underbrace{\frac{p_1}{p_0}}_{=WF} - 1 = \boldsymbol{WF - 1} = 1{,}1 - 1 = 0{,}1 \qquad \textbf{(R-12)}$$

Oftmals werden auch **Zusammenhänge zwischen Wachstumsraten** betrachtet. So trifft für eine Periode t mit BIP_t = Bruttoinlandsprodukt, AN_t= Zahl der Arbeitnehmer und AP_t= Arbeitsproduktivität als pro Arbeitnehmer erwirtschaftetem Bruttoinlandsprodukt beispielsweise folgender Zusammenhang zu:

$$BIP_0 = \underbrace{\frac{BIP_0}{AN_0}}_{=AP_0} \cdot AN_0 = AP_0 \cdot AN_0$$

Für die Wachstumsraten der drei Größen gilt dabei:

$$BIP_1 = BIP_0 \cdot (1 + \omega_{BIP}) = \underbrace{AP_0 \cdot (1 + \omega_{AP})}_{=AP_1} \cdot \underbrace{AN_0 \cdot (1 + \omega_{AN})}_{=AN_1}$$

$$= \underbrace{AP_0 \cdot AN_0}_{=BIP_0} \cdot (1 + \omega_{AP}) \cdot (1 + \omega_{AN}).$$

Dividiert man linke und rechte Seite durch BIP_0 und zieht man auf beiden Seiten 1 ab, folgt:

$$\boldsymbol{\omega_{BIP}} = \omega_{AP} + \omega_{AN} + \underbrace{\omega_{AP} \cdot \omega_{AN}}_{\substack{\to 0 \text{ für} \\ \text{kleine} \\ \text{Wachstumsraten}}} \approx \boldsymbol{\omega_{AP} + \omega_{AN}}. \qquad \textbf{(R-13)}$$

Bei einer **Wachstumsratentransformation** wird also bei kleinen prozentualen Änderungen aus einem „· " ein „+". (Analog wird aus einem „/“ ein „−“.)

Zum Beispiel: $BIP_0 = 20.000 = \underbrace{100}_{AP_0} \cdot \underbrace{200}_{AN_0}$ und $BIP_1 = 20.604 = \underbrace{101}_{AP_1} \cdot \underbrace{204}_{AN_1}$.

Bezogen auf die Wachstumsraten der drei Größen bedeutet dies:

$$\underbrace{0{,}0302}_{\omega_{BIP}} = \underbrace{0{,}01}_{\omega_{AP}} + \underbrace{0{,}02}_{\omega_{AN}} + \underbrace{0{,}01 \cdot 0{,}02}_{\substack{\omega_{AP} \cdot \omega_{AN} \\ =0{,}0002 \approx 0}} \approx \underbrace{0{,}01}_{\omega_{AP}} + \underbrace{0{,}02}_{\omega_{AN}}.$$