Physikalische Anwendungen – Statik

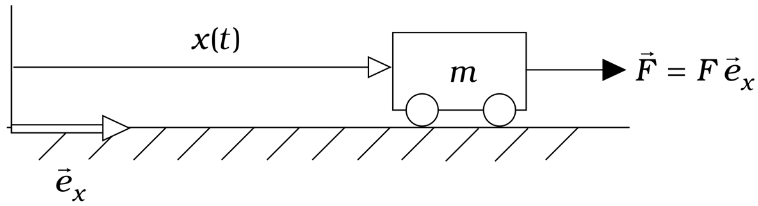
Zum Mathematik-Lehrbuch „Notwendig und zunächst hinreichend“ (Shaker Verlag, Aachen) gibt es mehrere PDF-Dokumente mit ergänzenden Beispielen und Aufgaben, die die Anwendung der mathematischen Grundlagen in ingenieurrelevanten Bereichen zeigen.

Im vorliegenden Dokument finden Sie eine Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus dem Bereich der Statik:

NEWTONsches Grundgesetz, Gewichtskraft – Federkraftgesetz –
Schwerpunkt – HOOKEsches Gesetz – Wirkungslinie, Kräftepaar –
Moment und Hebelarm, Momentenvektor – Gleichgewichtsbedingungen –
Fachwerk – Reaktionskraft – Auflager – Freischneiden eines Körperverbandes –
Haft- und Gleitreibung

v1.0

Ein in Paris aufbewahrter Probekörper wird als Muster für die Maßeinheit der Materiemenge oder **Masse** m eines Körpers verwendet. Die Maßeinheit bezeichnet man als „1 Kilogramm“ und sie ist eine der Grundeinheiten der Physik, wie beispielsweise die Maßeinheit für die Länge: „1 Meter“ oder die Maßeinheit für die Zeit: „1 Sekunde “.



Wenn man einen Körper der Masse m mit der *konstanten* Beschleunigung

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)\vec{e}_x = \ddot{x}\,\vec{e}_x$$

bewegen will, muss man nach dem **NEWTONschen Grundgesetz** auf die Masse mit einer *konstanten* **Kraft**

$$\vec{F} = F\,\vec{e}_x$$

in Richtung der Beschleunigung einwirken, wobei

$$\boxed{m\vec{a} = \vec{F}}$$

gilt. Als Maßeinheit für Kräfte ist die Kraft „1 Newton = 1 N“ definiert, die eine Masse $m = 1$ Kilogramm mit

$$a = 1\,\frac{\text{Meter}}{(\text{Sekunde})^2}$$

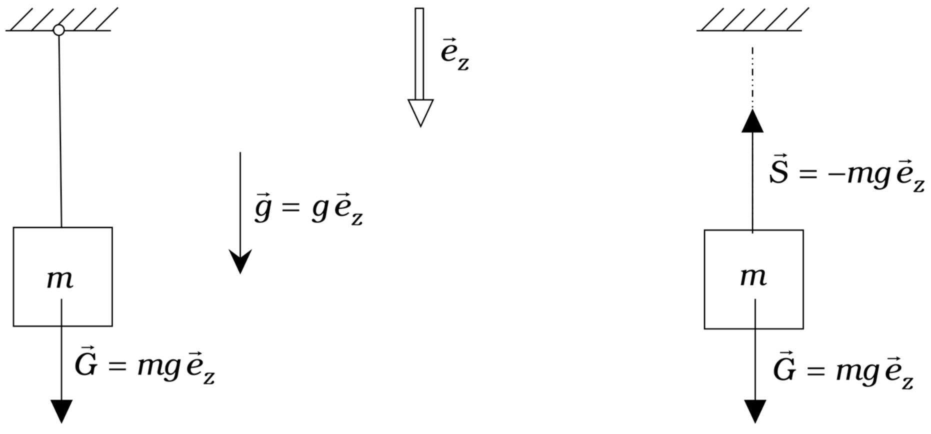
konstant beschleunigt.

$$(1\ \text{Kilogramm})\cdot\left(1\,\frac{\text{Meter}}{(\text{Sekunde})^2}\right) = 1\,\frac{\text{Kilogramm}\cdot\text{Meter}}{(\text{Sekunde})^2} =: 1\ \text{Newton}$$

Auf jeden Körper der Masse m wirkt in der Nähe der Erdoberfläche die Gravitationskraft $G = mg$ in Richtung zum Erdmittelpunkt. Sie bewirkt, dass der Körper im freien Fall bei Vernachlässigung der Luftreibung die konstante **Fallbeschleunigung**

$$\boxed{g = 9{,}81\,\frac{\text{Meter}}{(\text{Sekunde})^2}}$$

erfährt.



Freikörperbild

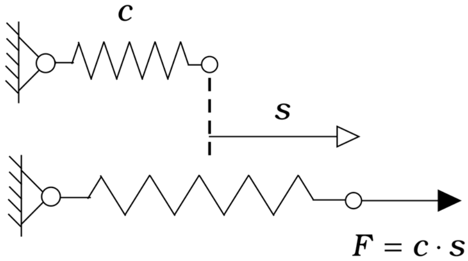
Wird ein Körper der Masse m an einem Faden aufgehängt, so dass er nicht in Richtung der Gewichtskraft $\vec{G} = mg\,\vec{e}_z$ fallen kann, so muss eine zweite Kraft $\vec{S} = -mg\,\vec{e}_z$ der unvermeidlichen Gewichtskraft entgegenwirken, damit

$$m\ddot{z}\,\vec{e}_z = \vec{G} + \vec{S} = \left(mg\,\vec{e}_z\right) + \left(-mg\,\vec{e}_z\right) = \vec{0}$$

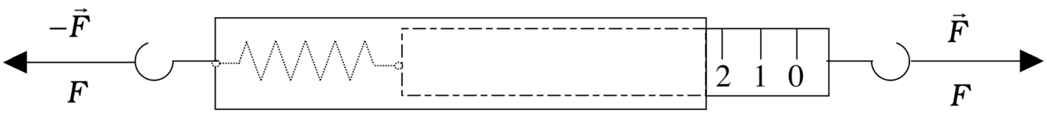
wird. Man bezeichnet die im Faden wirkende Kraft als **Reaktionskraft**, die eine **Zwangsbedingung** (hier: keine Bewegung in z-Richtung) erzwingen soll. Die Gewichtskraft und die Reaktionskraft bilden am starren Körper ein **Gleichgewichtssystem**.

✎ ______________________________

Eine Schraubenfeder aus Stahldraht kann mit einer Kraft $F = c \cdot s$ um die Strecke s verlängert werden, wobei c die **Federsteifigkeit** ist.



Die abgebildete Federwaage ist ein Kraftmessgerät



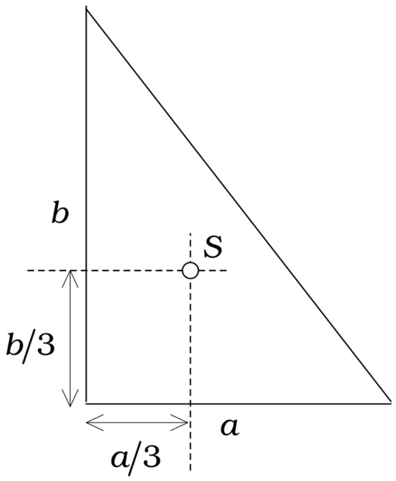
und eine Anwendung des **Federkraftgesetz**es $F = c \cdot s$.

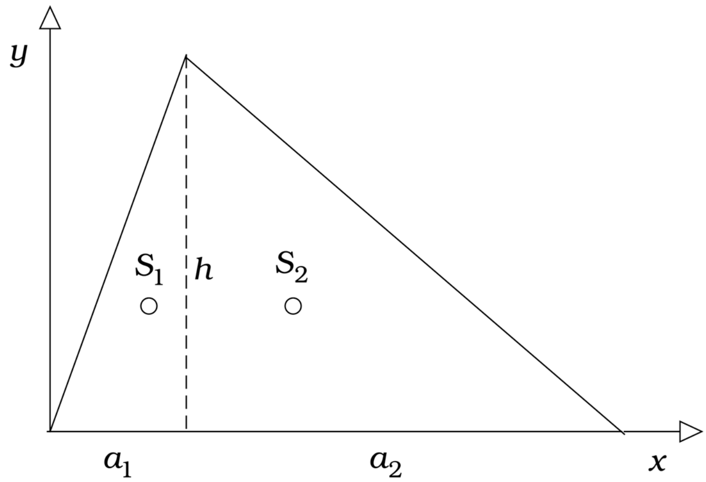
✎ ______________________________

Der **Schwerpunkt** S eines Körpers der Masse m ist der Angriffspunkt der Gewichtskraft $m\vec{g}$. Ein scheibenförmiger Körper der Dicke d, dessen Mittelfläche in der xy-Ebene liegt, hat die Koordinate $z_S = 0$. Besteht die Schnittfläche $z = 0$ durch den Körper aus Teilflächen, deren Schwerpunkte bekannt sind, so kann man die Koordinaten x_S und y_S des gesamten scheibenförmigen Körpers berechnen nach der Formel

$$\boxed{\vec{r}_S = \frac{A_1\vec{r}_{S_1} + A_2\vec{r}_{S_2} + A_3\vec{r}_{S_3} + \ldots}{A_1 + A_2 + A_3 + \ldots}}$$

Bei einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b hat der Schwerpunkt S den Abstand $a/3$ von der b-Kathete und den Abstand $b/3$ von der a-Kathete. Damit kann man die Schwerpunktskoordinaten für ein beliebiges Dreieck berechnen.

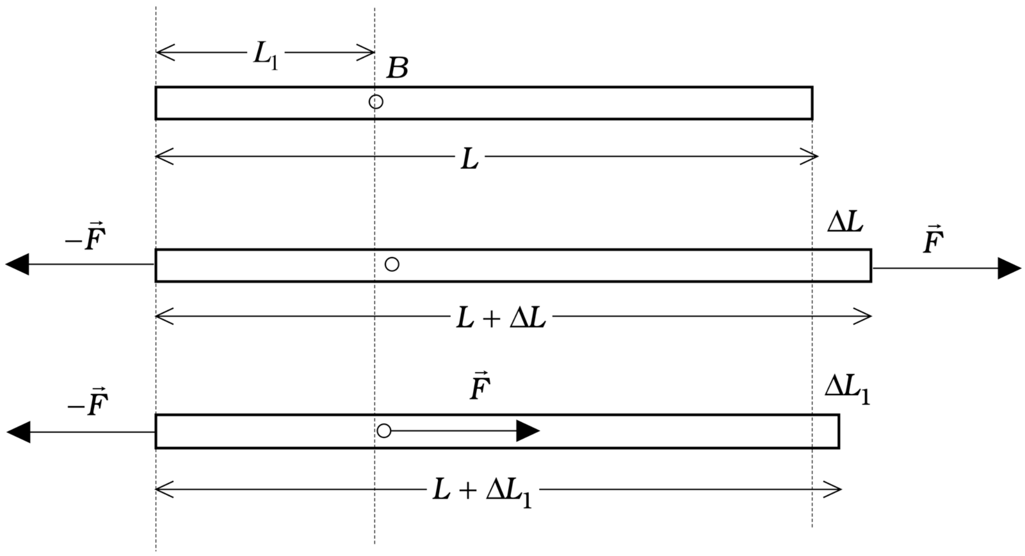




$$\vec{r}_{S_1} = \frac{2}{3}a_1\vec{e}_x + \frac{1}{3}h\,\vec{e}_y, \qquad \vec{r}_{S_2} = \left(a_1 + \frac{1}{3}a_2\right)\vec{e}_x + \frac{1}{3}h\,\vec{e}_y,$$

$$A_1 = \frac{1}{2}a_1 h, \qquad A_2 = \frac{1}{2}a_2 h$$

$$\vec{r}_S = \frac{A_1\vec{r}_{S_1} + A_2\vec{r}_{S_2}}{A_1 + A_2} = \frac{2a_1 + a_2}{3}\vec{e}_1 + \frac{1}{3}h\,\vec{e}_y\,.$$



Wenn ein Stab aus Stahl mit der Querschnittfläche A und der Länge L an den beiden Endquerschnitten durch entgegengesetzt gerichtete Kräfte belastet wird, ändert sich seine Länge um

$$\Delta L = \frac{L}{EA} F \qquad (\text{HOOKEsches Gesetz})$$

wobei der **Elastizitätsmodul** E von Stahl den Wert

$$E = 2{,}1 \cdot 10^5 \frac{\text{Newton}}{(\text{Millimeter})^2} = 2{,}1 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{(\text{mm})^2}$$

hat. Mit den speziellen Werten

$$L = 1\,\text{Meter} = 10^3\,\text{mm}, \quad A = 1(\text{cm})^2 = 10^2\,(\text{mm})^2, \quad F = 10^3\,\text{N}$$

wird

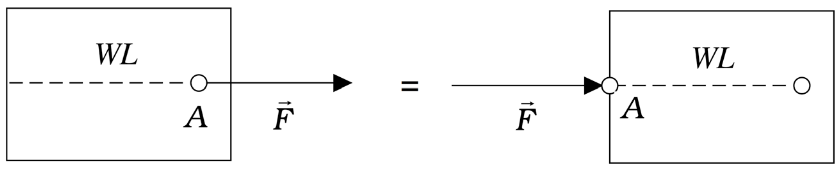
$$\Delta L = \frac{10^3\,\text{mm} \cdot 10^3\,\text{N}}{2{,}1 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{(\text{mm})^2} \cdot 10^2\,(\text{mm})^2} = \frac{1}{21}\,\text{mm} = 0{,}048\,\text{mm}\,.$$

Die Gewichtskraft von 100 Kilogramm Masse ist ungefähr 1000 Newton.
Wenn man den Angriffspunkte der Kraft $\vec{F}$ auf ihrer Wirkungslinie in den Punkt B verlegt, verlängert sich der Stab nur um

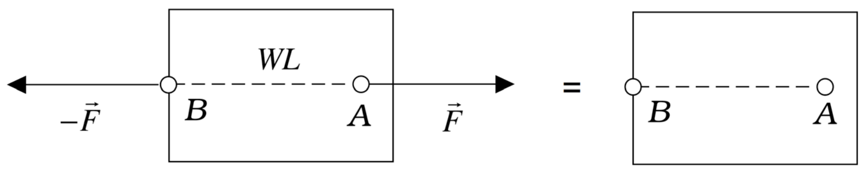
$$\Delta L_1 = \frac{L_1}{EA} F\,.$$

Man darf also Kräfte in einem **dehnbaren** Körper **nicht** verschieben! Nur wenn man die Dehnungen als vernachlässigbar klein bewertet, ist es zulässig, das Modell eines **starren** Körpers zu verwenden, bei dem das Verschieben von Kräften auf ihren Wirkungslinien ohne Wirkung auf den Körper bleibt.

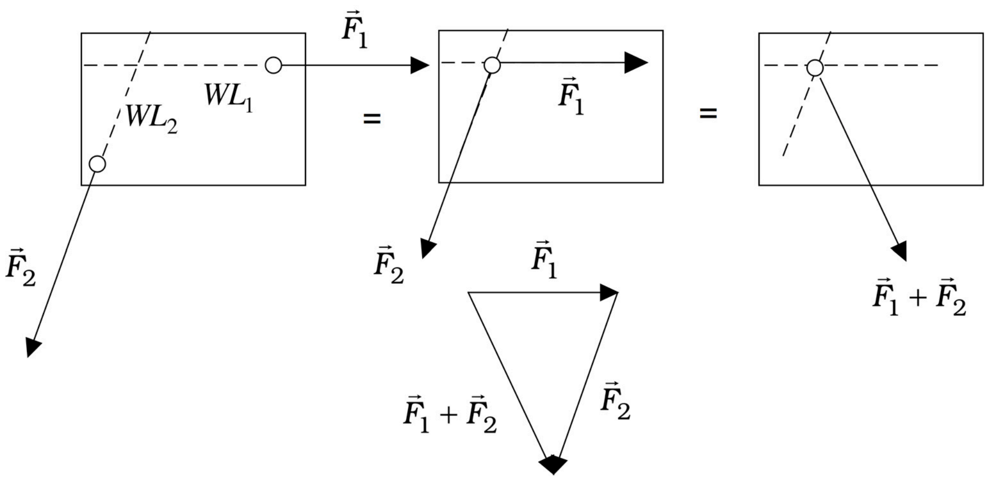
Bei einem **starren (!)** Körper darf man definitionsgemäß den Angriffspunkt A einer Kraft auf der **Wirkungslinie** (WL) der Kraft beliebig verschieben:



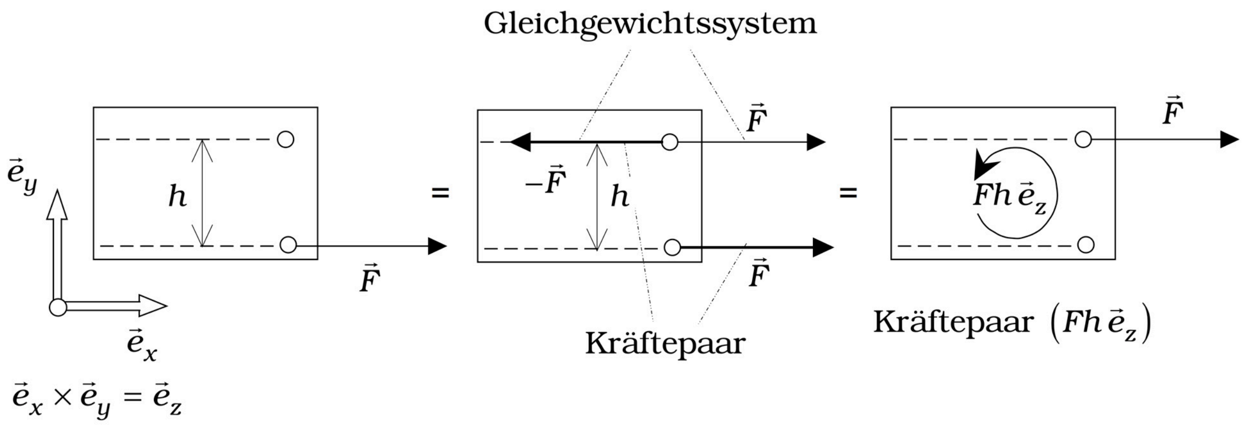
Zwei entgegengesetzt gerichtete, gleich große Kräfte auf der **gleichen** Wirkungslinie heben sich in ihrer Wirkung auf den **starren** Körper auf.



Zwei Kräfte, die auf unterschiedlichen Wirkungslinien in der xy-Ebene an einem **starren** Körper angreifen, dürfen auf ihren Wirkungslinien in den Schnittpunkt der Wirkungslinien verschoben und durch ihre Vektorsumme ersetzt werden.



Wenn eine Kraft am **starren** Körper *parallel* zur Wirkungslinie verschoben wird, entsteht zusätzlich ein **Kräftepaar**.



Die Intensität der Drehwirkung, die das Kräftepaar auf den starren Körper ausübt, wird angegeben durch das Produkt der Kraftgröße mit dem Abstand der beiden parallelen Wirkungslinien; der Drehsinn wird nach der Rechte-Hand-Regel mit dem auf der Kräfteebene senkrechten Richtungsvektor $\vec{e}_z$ beschrieben.

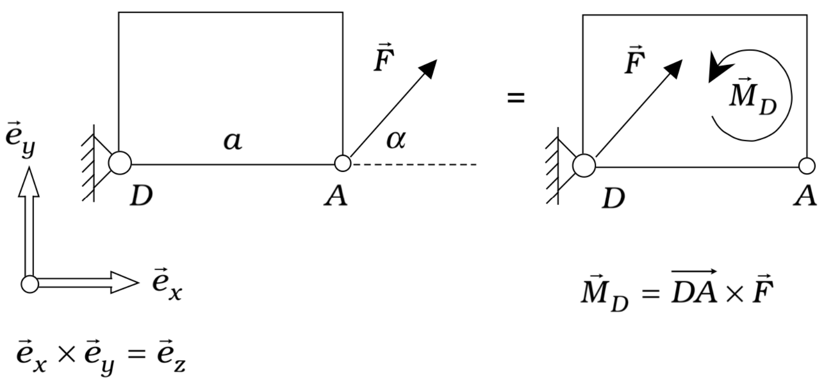
Ein im Punkt D drehbar gelagerter **starrer** Körper erfährt von einer im Punkt A angreifenden Kraft $\vec{F}$ eine Drehwirkung, die durch den auf D bezogenen **Momentenvektor**

$$\vec{M}_D = \overrightarrow{DA} \times \vec{F} = a\,\vec{e}_x \times \left(F\cos(\alpha)\,\vec{e}_x + F\sin(\alpha)\,\vec{e}_y\right) = aF\sin(\alpha)\,\vec{e}_z$$

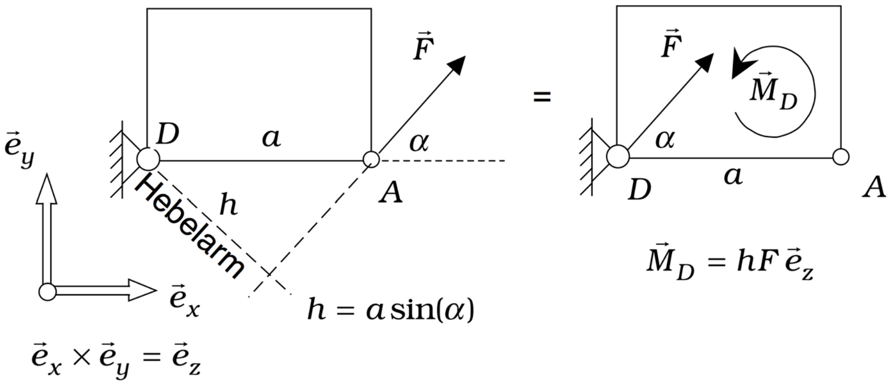
oder

$$\vec{F} = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y$$

$$\vec{M}_D = a\vec{e}_x \times \left(F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y\right) = aF_y\vec{e}_z$$

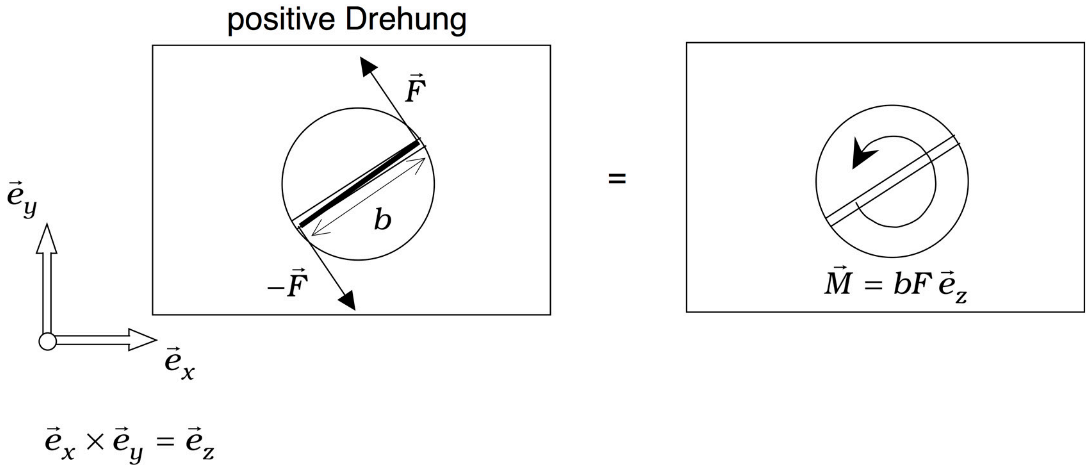


beschrieben wird. Für $\alpha = 0$ $(F_y = 0)$ ist die Drehwirkung null, weil die Wirkungslinie der Kraft durch den Drehpunkt D geht. Der Abstand h der Wirkungslinie der Kraft $\vec{F}$ vom Drehpunkt D ist der **Hebelarm** der Kraft.



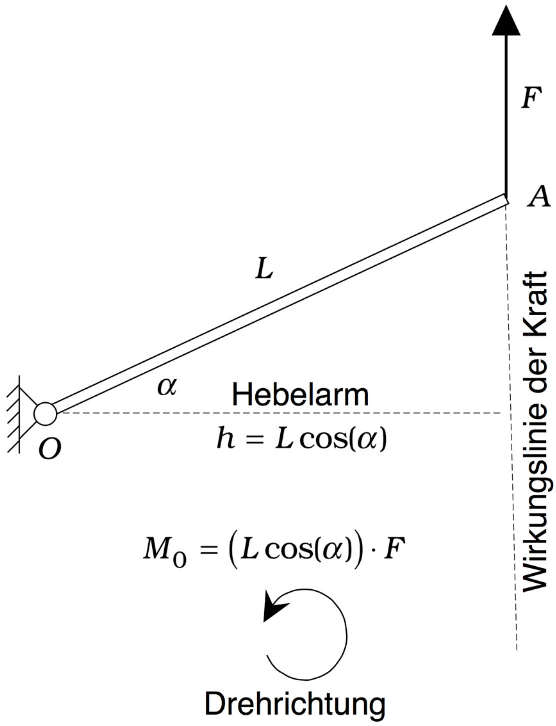
$$\vec{M}_D = aF_y\vec{e}_z = \underbrace{\big(a\sin(\alpha)\big)}_{h}F\,\vec{e}_z = hF\,\vec{e}_z\,.$$

Wenn man einen Schraubenzieher mit der Schneidenbreite b in den Schlitz einer Schraube einführt und dann den Schraubenzieher um seine Achse dreht, überträgt man auf den Körper, in dem die Schraube feststeckt, ein **Kräftepaar**:



✎ ___

Eine im Punkt O drehbar gelagerte Stange wird im Punkt A durch eine Kraft F belastet und beginnt sich zu drehen.



Das Maß für die momentane Intensität der Drehwirkung der Kraft F ist das auf den Punkt O bezogene **Moment** M_0 der Kraft F. Die Wirkungslinie der Kraft hat den Abstand

$$h = L\cos(\alpha)$$

vom Drehpunkt O, den man auch **Hebelarm** nennt.

Als auf den Punkt O bezogenes Drehmoment der Kraft ist dann definiert:

$$\boxed{M_0 := h \cdot F = L\cos(\alpha) \cdot F}$$

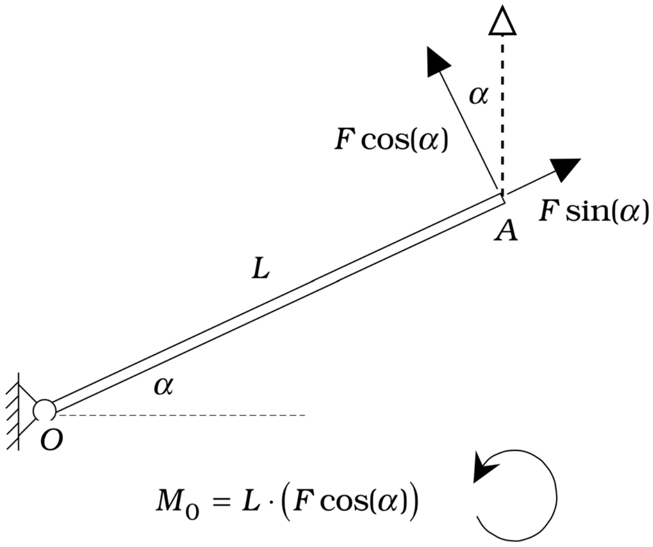
$$M_0 := \text{Hebelarm mal Kraft}$$

Ergänzt werden muss diese Formel noch durch die Angabe des Drehrichtung.

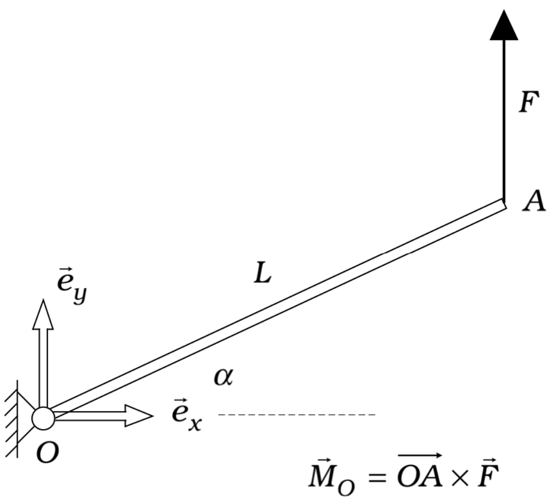
Zerlegt man die im Punkt A angreifende Kraft in die Komponenten $F\sin(\alpha)$ parallel zur Stange und $F\cos(\alpha)$ senkrecht zur Stange, dann wird der Hebelarm der Kraftkomponente $F\sin(\alpha)$ null und der Hebelarm der Kraftkomponente $F\cos(\alpha)$ ist L. Dementsprechend wird

$$M_0 = L \cdot \left(F\cos(\alpha)\right)$$

mit unveränderter Drehrichtung. Das Drehmoment ist also von der Kraftzerlegung unabhängig.



Die dritte Version der Berechnung des Momentes – die vektorielle – ist die universellste, weil sie nicht nur die Intensität sondern auch die Drehrichtung liefert.



Aus dem Verbindungsvektor vom Drehpunkt O zum Angriffspunkt A

$$\overrightarrow{OA} = L\cos(\alpha)\,\vec{e}_x + L\sin(\alpha)\,\vec{e}_y$$

und dem Kraftvektor

$$\vec{F} = F\,\vec{e}_y$$

ergibt sich der auf den Punkt O bezogene **Momentenvektor** aus dem Vektorprodukt der beiden Vektoren

$$\boxed{\vec{M}_0 := \overrightarrow{OA} \times \vec{F}}$$

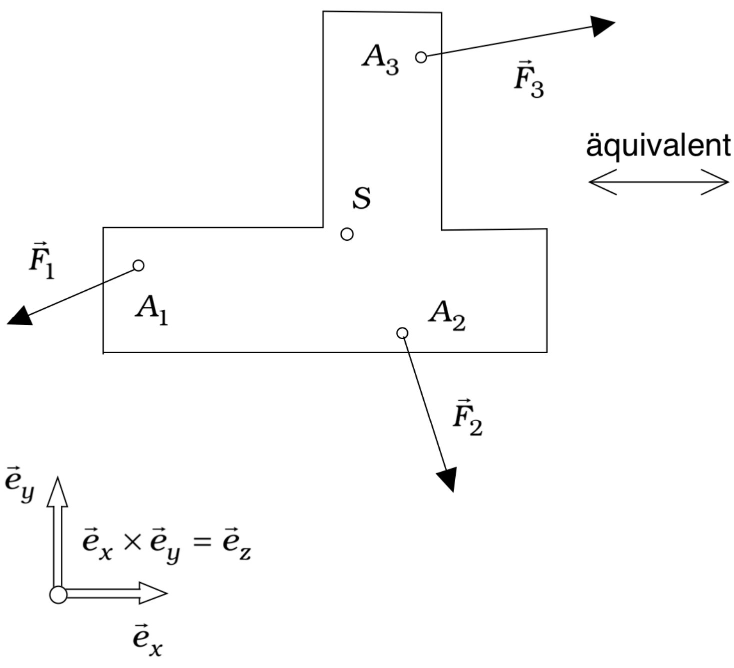
$$\vec{M}_0 := \overrightarrow{OA} \times \vec{F} = \Big(L\cos(\alpha)\,\vec{e}_x + L\sin(\alpha)\,\vec{e}_y\Big) \times \Big(F\,\vec{e}_y\Big)$$

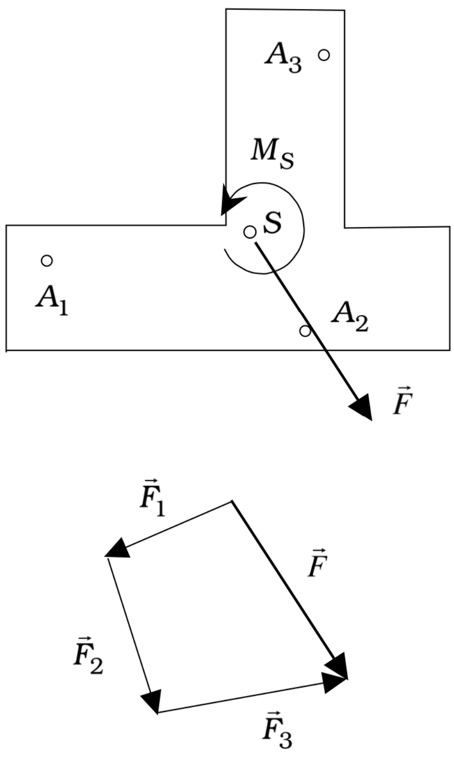
$$\vec{M}_0 = LF\left(\cos(\alpha)\underbrace{\vec{e}_x \times \vec{e}_y}_{\vec{e}_z} + \sin(\alpha)\underbrace{\vec{e}_y \times \vec{e}_y}_{\vec{0}}\right) \qquad \vec{M}_0 = \begin{bmatrix} L\cos(\alpha) \\ L\sin(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L\,F\cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\vec{M}_0 = L\,F\cos(\alpha)\,\vec{e}_z$$

Der Drehsinn des Drehmomentes ist über die Rechte-Hand-Regel zu ermitteln: Schlingt man die Finger der rechten Hand um den Momentenvektor, wobei der ausgestreckte Daumen in Richtung des Vektors zeigt, so zeigen die gekrümmten Finger die Drehrichtung an.

Die Vorteile der vektoriellen Berechnung eines Drehmoments werden bei dreidimensionalen Kräftesystemen an Körpern besonders deutlich.





$$\vec{M}_S = M_S\vec{e}_z = \overrightarrow{SA_1} \times \vec{F}_1 + \overrightarrow{SA_2} \times \vec{F}_2 + \overrightarrow{SA_3} \times \vec{F}_3$$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

Wenn in der xy-Ebene beispielsweise in den Punkten A_1, A_2, A_3 eines **starren** Körpers die Kräfte $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ angreifen, kann man die **Kräftesumme**

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

bilden und die drei Kräfte durch die Kraft $\vec{F}$ in einem beliebigen Punkt S ersetzen, muss aber **zusätzlich** ein Kräftepaar angreifen lassen, dessen Drehwirkung der auf S bezogenen Summe der Momente der drei Kräfte entspricht.

Man nennt diese Vereinfachung eines Systems von mehreren Kräften an einem **starren** Körper **Reduktion** des ursprünglichen Kräftesystems **in den Punkt** S zu einer Einzelkraft (Kräftesumme) und einem Kräftepaar (Momentensumme bezogen auf den Punkt S) . Häufig ist S der Schwerpunkt.

$$\boxed{\begin{array}{c} \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \\ \vec{M}_S = \overrightarrow{SA_1} \times \vec{F}_1 + \overrightarrow{SA_2} \times \vec{F}_2 + \overrightarrow{SA_3} \times \vec{F}_3 \end{array}}$$

Das Kräftesystem wird **Gleichgewichtssystem** genannt, wenn die **Gleichgewichtsbedingungen**

$$\boxed{\begin{array}{c} \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0} \\ \vec{M}_S = \overrightarrow{SA_1} \times \vec{F}_1 + \overrightarrow{SA_2} \times \vec{F}_2 + \overrightarrow{SA_3} \times \vec{F}_3 = \vec{0} \end{array}}$$

erfüllt sind.

Die hier beschriebenen Operationen mit drei Kräften an einem starren Körper gelten entsprechend für eine beliebige Zahl von Kräften.

Wenn die Summe aller angreifenden Kräfte und die auf den Punkt S bezogene Summe der Momente aller Kräfte jeweils null sind, dann ist auch die auf einen beliebigen anderen Punkt P des starren Körpers bezogene Summe aller Momente null:

$$\vec{M}_P = \overrightarrow{PA_1} \times \vec{F}_1 + \overrightarrow{PA_2} \times \vec{F}_2 + \overrightarrow{PA_3} \times \vec{F}_3$$

$$\overrightarrow{PA_i} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SA_i} \qquad i = 1, 2, 3$$

$$\vec{M}_P = \overrightarrow{PS} \times \underbrace{\left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3\right)}_{\vec{F} = \vec{0}} + \underbrace{\overrightarrow{SA_1} \times \vec{F}_1 + \overrightarrow{SA_2} \times \vec{F}_2 + \overrightarrow{SA_3} \times \vec{F}_3}_{\vec{M}_S = \vec{0}}$$

$$\vec{M}_P = \vec{0}$$

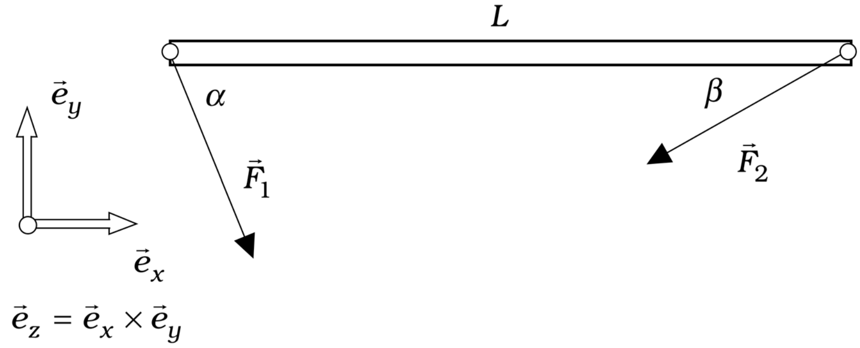
Die Gleichgewichtsbedingungen für einen starren Körper lauten also:

Summe aller angreifenden Kräfte = null Summe aller auf einen beliebigen Punkt bezogenen Momente = null

Das gilt auch für dreidimensionale Kräftesysteme an einem dreidimensionalen starren Körper.

✎ ______________________________

Ein starrer Stab ist in den Endpunkten durch zwei Kräfte belastet; unter welchen Bedingungen befindet er sich im Gleichgewicht?



Aus der Gleichgewichtsbedingung für die Kräfte folgt

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0} \qquad \to \qquad \vec{F}_2 = -\vec{F}_1 .$$

Diese Bedingung ist notwendig, aber nicht hinreichend, denn es muss zusätzlich das Momentengleichgewicht gelten. Bezogen auf den Schwerpunkt des Stabes muss die Summe der Momente null sein:

$$-\frac{L}{2}\vec{e}_x \times \vec{F}_1 + \frac{L}{2}\vec{e}_x \times \vec{F}_2 = \vec{0}$$

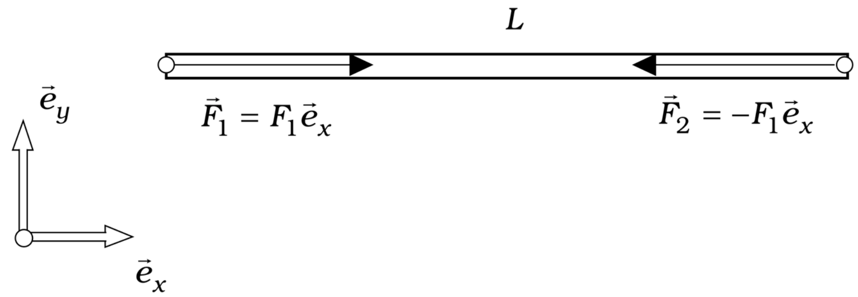
und weil $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ ist, lautet die zweite Gleichgewichtsbedingung

$$L\vec{e}_x \times \vec{F}_1 = \vec{0}$$

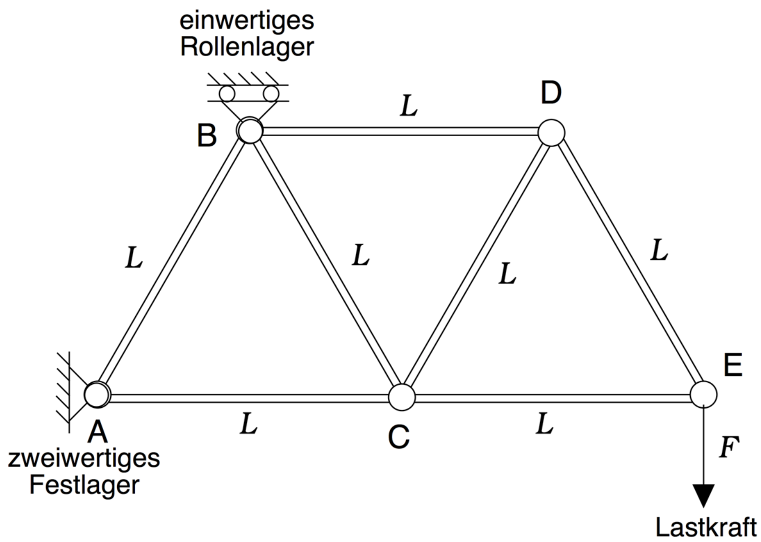
$$L\vec{e}_x \times \left(F_1 \cos(\alpha)\vec{e}_x - F_1 \sin(\alpha)\vec{e}_y\right) = \vec{0}$$

$$LF_1 \sin(\alpha)\,\vec{e}_x \times \vec{e}_y = LF_1 \sin(\alpha)\,\vec{e}_z = \vec{0} \qquad \to \qquad \alpha = 0$$

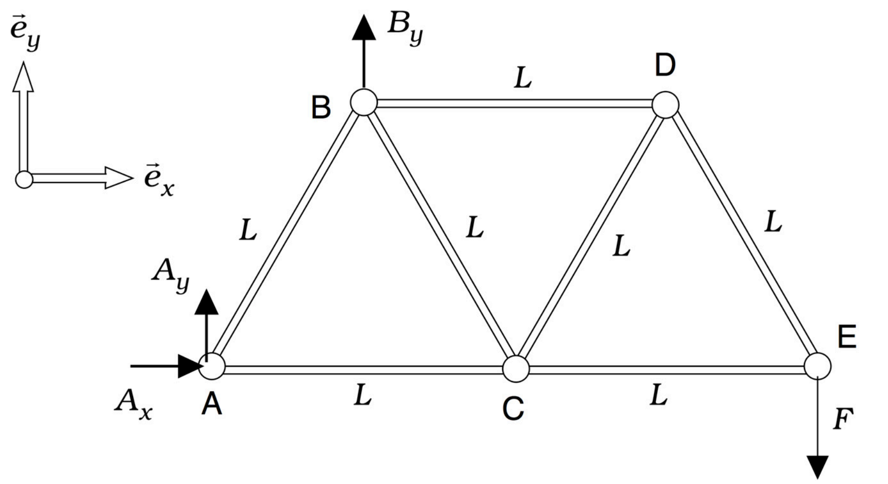
Der Stab ist also dann und nur dann im Gleichgewicht, wenn beide Kräfte gleich groß und parallel zum Stab entgegengesetzt gerichtet sind.



Die folgende Abbildung zeigt ein starres **Fachwerk**; in ihm sind **starre** Stäbe über reibungsfreie Gelenke zu einem Dreiecksnetz miteinander verbunden.



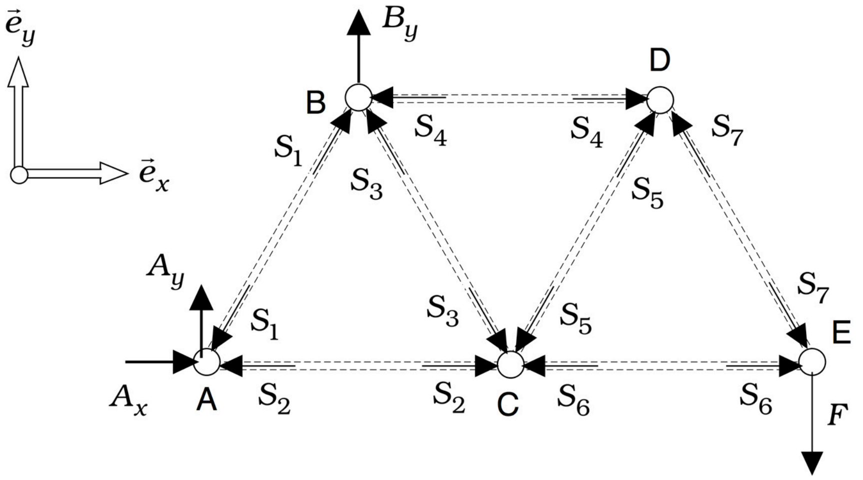
Wird das starre Gebilde nur in den Gelenkpunkten A, B, ..., E belastet oder gelagert, so kann man die in den Stäben wirkenden Längskräfte berechnen, indem man zuerst die Lagerkräfte des gesamten Fachwerks über die drei Gleichgewichtsbedingungen eines ebenen starren Körpers bestimmt.



$$\begin{aligned} A_x &= 0 \\ A_y + B_y - F &= 0 \\ \frac{L}{2} B_y - 2LF &= 0 \end{aligned} \qquad A_x = 0, \qquad B_y = 4F, \qquad A_y = -3F$$

Anschließend werden die Knoten frei geschnitten, um die noch unbekannten Stabkräfte, deren Wirkungslinien in den betreffenden Stabachsen liegen, anschaulich (beispielsweise) als Druckbelastungen der Knoten darzustellen.

Weil hier alle sieben Stäbe die gleiche Länge L haben, sind alle Innenwinkel $60°$.



Nun können für jeden Knoten die Gleichgewichtsbedingungen

$$\boxed{\text{Summe aller am Knoten angreifenden Kräfte = null}}$$

aufgestellt und nacheinander gelöst werden.

Knoten A:

$$A_x - S_2 - S_1 \cos(60°) = 0 \qquad 0 - S_2 - S_1 \frac{1}{2} = 0$$

$$A_y - S_1 \sin(60°) = 0 \qquad -3F - S_1 \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0$$

$$S_1 = -2\sqrt{3}\,F, \qquad S_2 = \sqrt{3}\,F$$

Knoten B:

$$S_1 \cos(60°) - S_3 \cos(60°) - S_4 = 0 \qquad \left(-2\sqrt{3}\,F\right)\frac{1}{2} - S_3 \frac{1}{2} - S_4 = 0$$

$$B_y + S_1 \sin(60°) + S_3 \sin(60°) = 0 \qquad 4F + \left(-2\sqrt{3}\,F\right)\frac{1}{2}\sqrt{3} + S_3 \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0$$

$$S_3 = -\frac{2}{\sqrt{3}}F, \qquad S_4 = -\frac{2}{\sqrt{3}}F$$

Knoten C:

$$S_2 + S_3 \cos(60°) - S_5 \cos(60°) - S_6 = 0 \qquad \sqrt{3}F - \frac{1}{\sqrt{3}}F - S_5 \frac{1}{2} - S_6 = 0$$

$$-S_3 \sin(60°) - S_5 \sin(60°) = 0 \qquad \frac{2}{\sqrt{3}}F - S_5 = 0$$

$$\boxed{S_5 = \frac{2}{\sqrt{3}} F, \qquad S_6 = \frac{1}{\sqrt{3}} F}$$

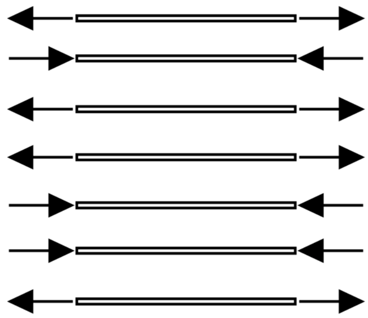
Knoten E:

$$\begin{aligned} S_6 + S_7 \cos(60°) &= 0 \\ -F - S_7 \sin(60°) &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}} F + S_7 \frac{1}{2} &= 0 \\ -F - S_7 \frac{1}{2}\sqrt{3} &= 0 \end{aligned}$$

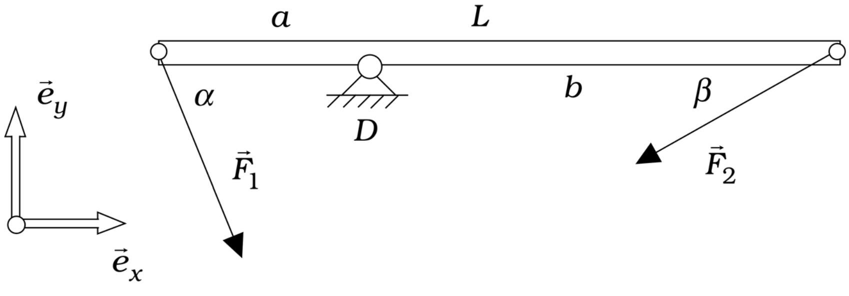
$$\boxed{S_7 = -\frac{2}{\sqrt{3}} F}$$

Sind die Kraftwerte positiv, so war die *angenommene* Richtung der Stabkraft korrekt,

AB	S_1	Zugstab
AC	S_2	Druckstab
BC	S_3	Zugstab
BD	S_4	Zugstab
CD	S_5	Druckstab
CE	S_6	Druckstab
DE	S_7	Zugstab

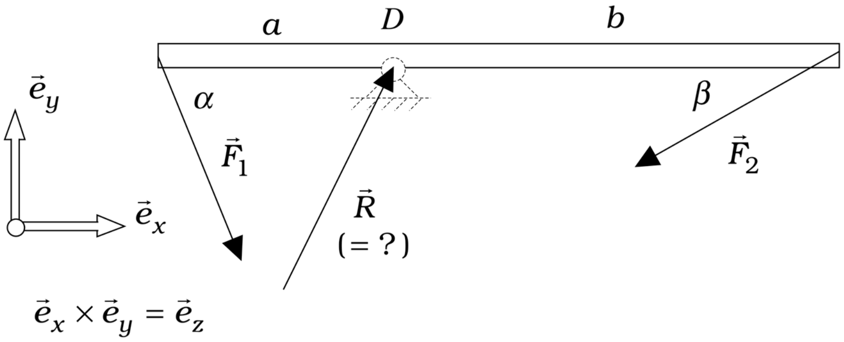


Wird ein starrer Stab in einem Punkt D drehbar gelagert, gibt es drei Kräfte: neben den beiden eingeprägten (bekannten) Kräften in den Endpunkten des Stabes eine noch unbekannte Reaktionskraft $\vec{R}$ im Punkt D, die den Stab im Punkt D drehbar festhält.



$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$

Im Freikörperbild des Stabes sind alle angreifenden Kräfte symbolisch dargestellt.



Die Gleichgewichtsbedingungen lauten

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{R} = \vec{0} \qquad \begin{aligned} F_1\cos(\alpha) - F_2\cos(\beta) + R_x &= 0 \\ -F_1\sin(\alpha) - F_2\sin(\beta) + R_y &= 0 \end{aligned}$$

$$\vec{M}_D = -a\,\vec{e}_x \times \left(F_1\cos(\alpha)\,\vec{e}_x - F_1\sin(\alpha)\,\vec{e}_y\right) + b\,\vec{e}_x \times \left(-F_2\cos(\beta)\,\vec{e}_x - F_2\sin(\beta)\,\vec{e}_y\right) = \vec{0}$$

$$\vec{M}_D = a\,F_1\sin(\alpha)\underbrace{\vec{e}_x \times \vec{e}_y}_{\vec{e}_z} - b\,F_2\sin(\beta)\underbrace{\vec{e}_x \times \vec{e}_y}_{\vec{e}_z} = \vec{0}$$

$$\vec{M}_D = \left(a\,F_1\sin(\alpha) - b\,F_2\sin(\beta)\right)\vec{e}_z = \vec{0}$$

Gleichgewicht ist also nur möglich, wenn die beiden eingeprägten Kräfte die Bedingung

$$\boxed{aF_1\sin(\alpha) = bF_2\sin(\beta)}$$

erfüllen, also beispielsweise

$$F_2 = \frac{a\sin(\alpha)}{b\sin(\beta)}F_1 .$$

Dann ist

$$\begin{aligned} R_x &= -F_1\cos(\alpha) + F_2\cos(\beta) \\ R_y &= F_1\sin(\alpha) + F_2\sin(\beta) \end{aligned} \qquad \boxed{\begin{aligned} R_x &= \left(-\cos(\alpha) + \frac{a\sin(\alpha)}{b\sin(\beta)}\cos(\beta)\right)F_1 \\ R_y &= \left(1 + \frac{a}{b}\right)\sin(\alpha)F_1 \end{aligned}}$$

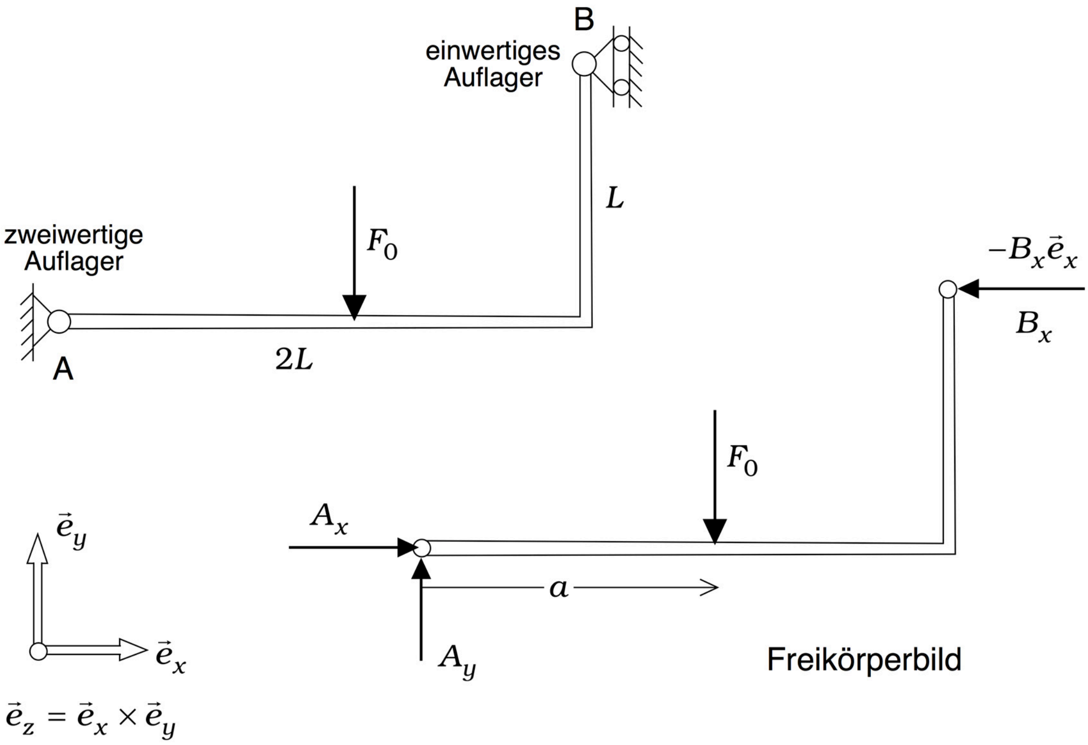
Im Spezialfall $\alpha = \beta = 90^\circ$ wird

$$F_2 = \frac{a}{b}F_1 \qquad (\text{ Hebelgesetz })$$

$$R_x = 0, \quad R_y = \left(1 + \frac{a}{b}\right)F_1$$

✎ ____________________

Ein starrer Rahmen ist im Punkt A gelenkig gelagert und im Punkt B mit einem Rollenlager abgestützt.



In A und B wirken zunächst unbekannte Reaktionskräfte, die den mit der eingeprägten Kraft F_0 belasteten Rahmen festhalten. Die Reaktionskraft im Punkt A hat zwei Komponenten in der xy-Ebene (deshalb: **zwei**wertiges Auflager) und die Reaktionskraft im Punkt B nur eine Komponente senkrecht zur Schiene des Rollenlagers (deshalb: **ein**wertiges Auflager).

Die Gleichgewichtsbedingungen für den Rahmen lauten

$$\begin{aligned} \text{Summe aller Kräfte in x-Richtung} &= 0 \\ \text{Summe aller Kräfte in y-Richtung} &= 0 \\ \text{Summe aller Moment um einen beliebigen Punkt} &= 0 \end{aligned}$$

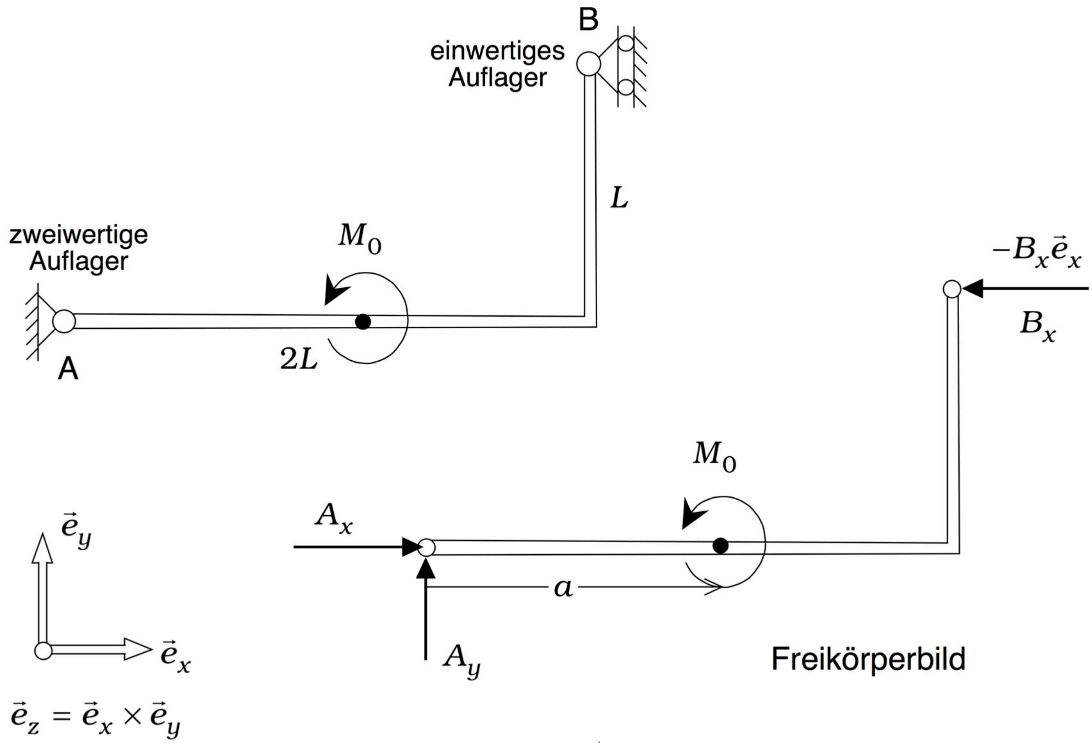
Als Bezugspunkt für die Momentensumme wird der Gelenkpunkt A gewählt.

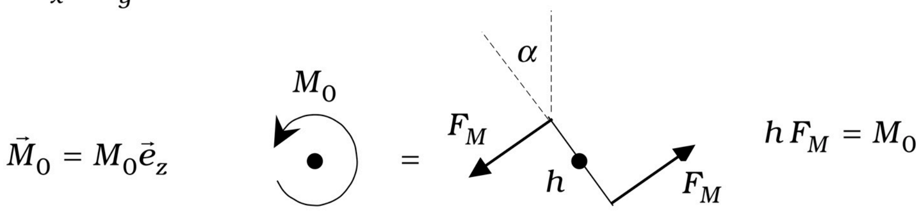
$$\begin{aligned} A_x - B_x &= 0 \\ A_y - F_0 &= 0 \\ B_x L - F_0 a &= 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\boxed{B_x = F_0 \frac{a}{L} \qquad A_x = F_0 \frac{a}{L} \qquad A_y = F_0}$$

Wird der Rahmen nicht durch eine Kraft F_0 sondern durch ein Kräftepaar M_0 belastet,





Realisierung eines Momentes als Kräftepaar

so kann man das Lastmoment durch ein äquivalentes Kräftepaar ersetzen und erhält dann die Gleichgewichtsbedingungen

$$
\begin{aligned}
A_x - B_x + \left(-F_M \cos(\alpha) + F_M \cos(\alpha)\right) &= 0 \qquad & A_x - B_x &= 0 \\
A_y + \left(-F_M \sin(\alpha) + F_M \sin(\alpha)\right) &= 0 \qquad & A_y &= 0 \\
B_x L + M_0 &= 0 \qquad & B_x L + M_0 &= 0
\end{aligned}
$$

Die in Klammern stehenden Ausdrücke enthalten die Beiträge des Kräftepaars zur Kräftesumme und sind null, können also auch weggelassen werden; das Moment M_0 ist nur bei der Momentensumme zu berücksichtigen. Die Auflagerkräfte lauten nun

$$
\boxed{B_x = -\frac{M_0}{L} \qquad A_x = -\frac{M_0}{L} \qquad A_y = 0}
$$

Der Abstand a des Angriffspunktes des Kräftepaars vom Auflager A kommt in diesem Ergebnis nicht vor. Daraus folgt: Man kann das Kräftepaar entlang des

starren Rahmens beliebig verschieben, ohne die Reaktionskräfte in den Auflagern zu verändern. Bei der Lastkraft F_0 ist das aber **nicht** erlaubt, denn die Lagerkraftkomponenten A_x und B_x sind von a abhängig.

Bisher wurden nur **einzelne** starre Körper in einer Gleichgewichtssituation untersucht. Wenn mehrere starre Körper miteinander verbunden sind und die Bedingungen für eine Gleichgewichtssituation bei Belastung der Körper zu analysieren sind, muss man den Verband **freischneiden**, ihn also in einzelne starre Körper zerlegen, damit man die Gleichgewichtsbedingungen, die für einen einzelnen starren Körper bekannt sind, anwenden kann. Beim Freischneiden einer gelenkigen Verbindung muss man darauf achten, dass die im Gelenk von einem auf den anderen Körper übertragenen unbekannten Reaktionskräfte dem **NEWTONschen Wechselwirkungsprinzip** „actio = reactio“ entsprechen.

Wirkt der Körper (1) im Gelenkpunkt C mit einer Kraft

$$\vec{C} = C_x\vec{e}_x + C_y\vec{e}_y$$

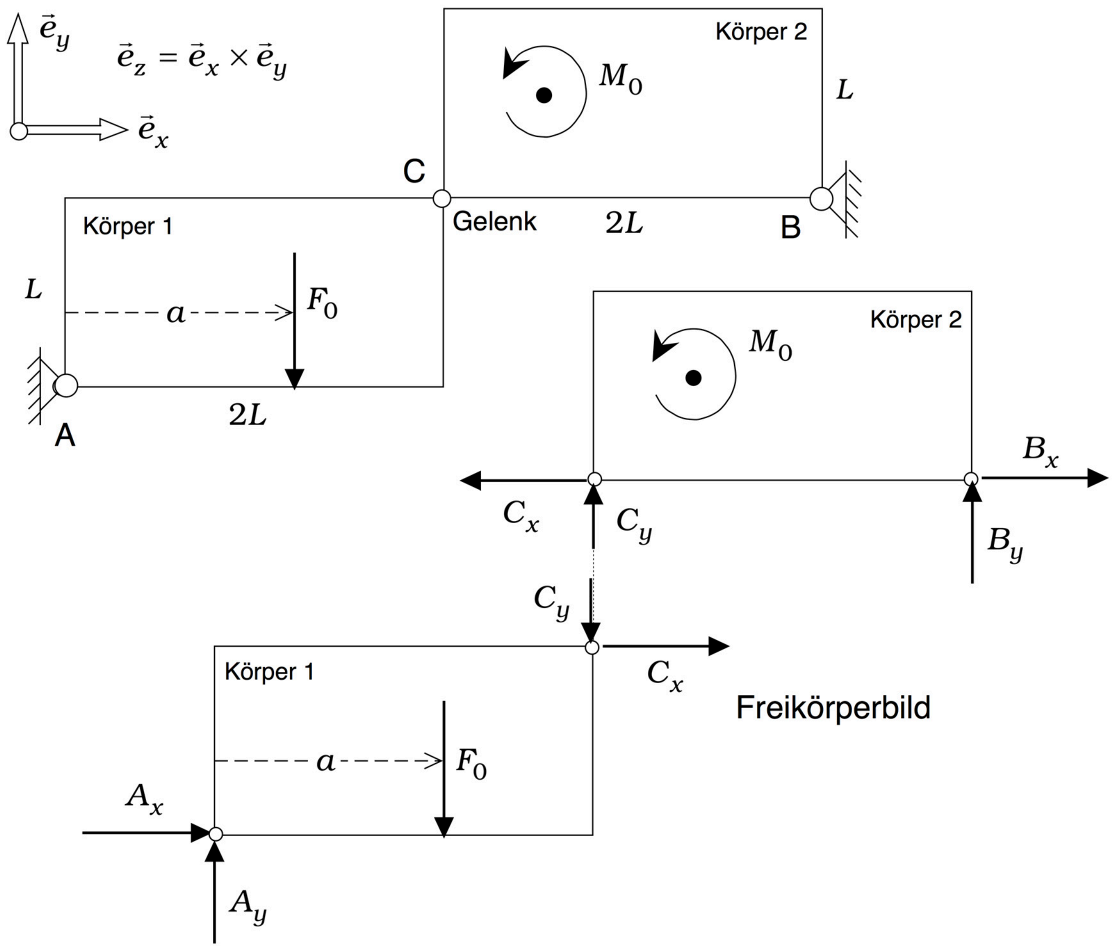
auf den Körper (2), so wirkt der Körper (2) mit der entgegengesetzt gerichteten Kraft

$$-\vec{C} = -C_x\vec{e}_x - C_y\vec{e}_y$$

auf den Körper (1).

Wichtig ist, dass man im Freikörperbild die bekannten eingeprägten Kräfte in der vorgegebenen Richtung einträgt; bei den unbekannten Reaktionskräften ist die Richtungswahl frei, aber in den Kontaktstellen muss das Wechselwirkungsprinzip beachtet werden. Die nach Lösung der Gleichgewichtsbedingungen bekannten Ergebnisse für die Reaktionskräfte geben dann Auskunft über die tatsächliche Richtung: Ein positives Vorzeichen bestätigt die Richtungswahl, ein negatives steht für Richtungsumkehr.

Das wird im folgenden Beispiel im Freikörperbild vorgeführt, bei dem zwei im Punkt C gelenkig miteinander verbundene starre Körper einen Verband bilden, der in den Punkten A und B jeweils zweiwertig gestützt wird und durch eine Einzelkraft F_0 im Körper (1) und ein Moment M_0 im Körper (2) belastet wird.



Die Gleichgewichtsbedingungen für die beiden starren Körper lauten nun, wenn man (beispielsweise) jeweils den Gelenkpunkt C als Bezugspunkt für die Momentensumme wählt:

$$\begin{aligned} A_x + C_x &= 0 & \qquad B_x - C_x &= 0 \\ A_y - C_y - F_0 &= 0 & \qquad C_y + B_y &= 0 \\ A_x L - A_y 2L + F_0 (2L - a) &= 0 & \qquad B_y 2L + M_0 &= 0 \end{aligned}$$

Das sind sechs Gleichungen für sechs unbekannte Reaktionskräfte. Die Kräfte können in der folgenden Reihenfolge berechnet werden:

$$B_y = -\frac{M_0}{2L}, \quad C_y = \frac{M_0}{2L}, \quad A_y = F_0 + \frac{M_0}{2L}, \quad A_x = \frac{M_0}{L} + F_0 \frac{a}{L},$$

$$C_x = -\frac{M_0}{L} - F_0 \frac{a}{L}, \quad B_x = -\frac{M_0}{L} - F_0 \frac{a}{L}$$

Das Ergebnis ist unabhängig von der Lage des Angriffspunktes des Lastmomentes M_0 im Körper (2). Verschiebt man jedoch den Angriffspunkt in den Körper (1), so lauten die Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{aligned} A_x + C_x &= 0 & B_x - C_x &= 0 \\ A_y - C_y - F_0 &= 0 & C_y + B_y &= 0 \\ A_x L - A_y 2L + F_0 \left(2L - a\right) + M_0 &= 0 & B_y 2L &= 0 \end{aligned}$$

und die Reaktionskräfte ändern sich:

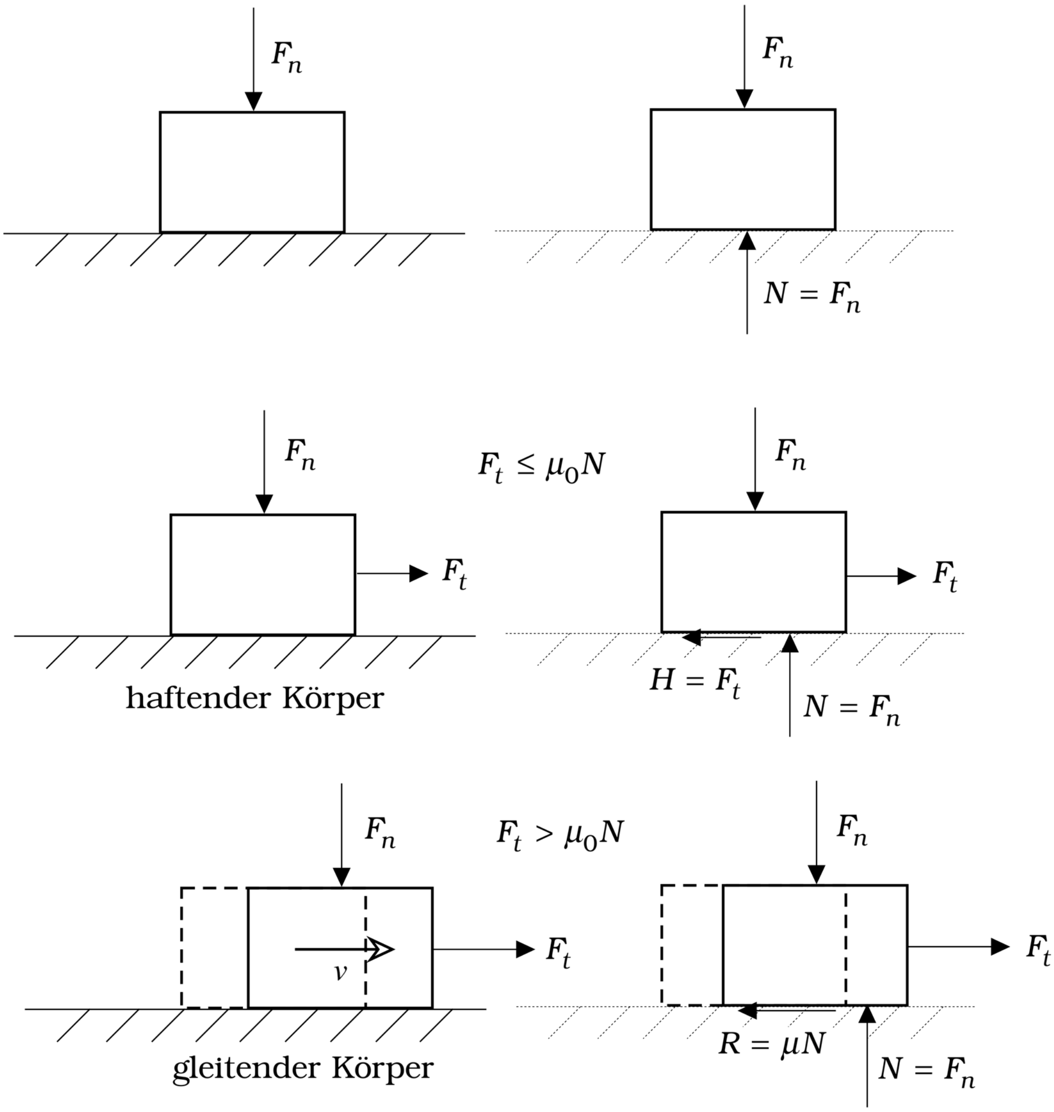
$$B_y = 0, \quad C_y = 0, \quad A_y = F_0, \quad A_x = F_0 \frac{a}{L} - \frac{M_0}{L},$$

$$C_x = \frac{M_0}{L} - F_0 \frac{a}{L}, \quad B_x = \frac{M_0}{L} - F_0 \frac{a}{L}$$

Man darf also ein Lastmoment nur innerhalb des Körpers frei verschieben, in dem es ursprünglich angreift. Die „Beweglichkeit“ einer Kraft ist wesentlich geringer: sie darf innerhalb eines starren Körpers nur auf ihrer Wirkungslinie verschoben werden.

✎

Wird ein starrer Körper, der auf einer festen ebenen Unterlage liegt, mit einer Kraft F_n senkrecht zur Kontaktfläche belastet, so entsteht in der Kontaktfläche eine auf den Körper wirkende Reaktionskraft N, die mit der Lastkraft ein Gleichgewichtssystem bildet. Sie hat also mit der Lastkraft eine gemeinsame Wirkungslinie, ist so groß wie die Lastkraft, aber entgegengesetzt gerichtet.



Belastet man den Körper zusätzlich tangential zur Kontaktfläche mit einer Kraft F_t, deren Intensität allmählich ansteigt, so beobachtet man, dass der Körper zunächst im Gleichgewicht bleibt, sich also nicht bewegt. In der Kontaktfläche entsteht eine **Haftkraft** H, die der tangentialen Lastkraft F_t entgegenwirkt und den Körper im Gleichgewicht hält:

$$H = F_t \,.$$

Die sich berührenden Kontaktflächen von Körper und Unterlage haben unterschiedliche Rauigkeiten, die eine Gleitbewegung des Körpers blockieren. Die Haftkraft kann jedoch nicht beliebig groß werden. Der höchste Betrag hängt von den Oberflächeneigenschaften der sich berührenden Flächen ab, die man durch einen **Haftreibungskoeffizienten** μ_0 ausdrückt, und von der Kraft N, mit der die Kontaktflächen aufeinander gedrückt werden. Es gilt

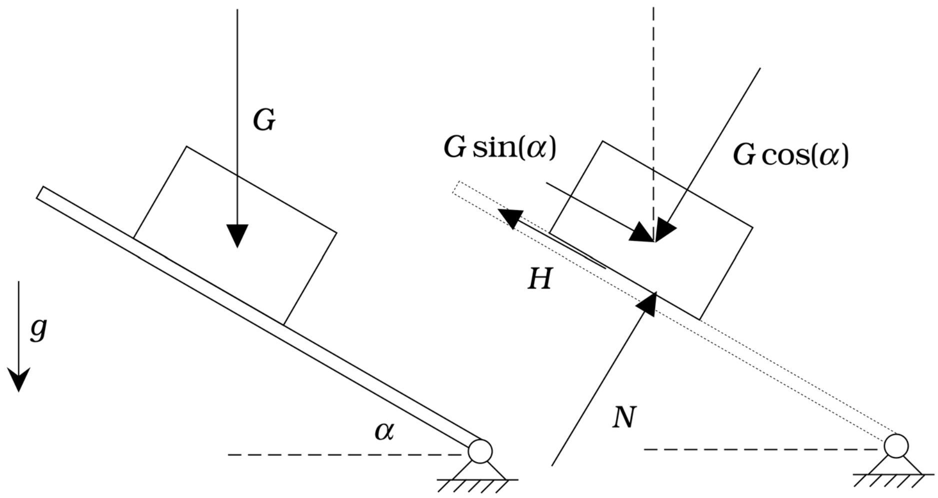
$$\boxed{H \le \mu_0 N}$$

Wenn die tangentiale Lastkraft $F_t > \mu_0 N$ ist, gleitet der Körper über die Unterlage, und die Rauigkeiten der Kontaktflächen bewirken eine **Gleitreibungskraft** R, die der Geschwindigkeit des gleitenden Körpers entgegengerichtet ist und in vielen Fällen durch das Kraftgesetz

$$\boxed{R = \mu N}$$

hinreichend genau beschrieben werden kann. Der **Gleitreibungskoeffizient** μ ist abhängig von den Rauigkeiten der aufeinander gleitenden Kontaktflächen und wird ebenso wie der Haftreibungskoeffizient experimentell bestimmt.

Liegt auf einer um den Winkel α gegen die horizontale Ebene geneigten Platte ein starrer Körper, so drückt die Komponente $G\cos(\alpha)$ der Gewichtskraft G



den Körper auf die Platte und die Gewichtskraftkomponente $G\sin(\alpha)$ wirkt tangential zur Platte. Die von der Platte auf den Körper wirkenden Reaktionskräfte

$$N = G\cos(\alpha) \quad \text{und} \quad H = G\sin(\alpha)$$

verhindern ein Abgleiten des Körpers, solange

$$H \le \mu_0 N \quad \rightarrow \quad \sin(\alpha) \le \mu_0 \cos(\alpha) \quad \rightarrow \quad \tan(\alpha) \le \mu_0$$

ist. Wenn der Winkel α zu groß wird $(\tan(\alpha) > \mu_0)$, gleitet der Körper auf der geneigten Platte in Richtung von $G\sin(\alpha)$, und aus der Haftreibungskraft wird die

Gleitreibungskraft

$$R = \mu G \sin(\alpha) .$$

Dieser Gleichgewichtsversuch auf einer geneigten Gleitbahn kann zur experimentellen Bestimmung der Reibungskoeffizienten verwendet werden.

✎