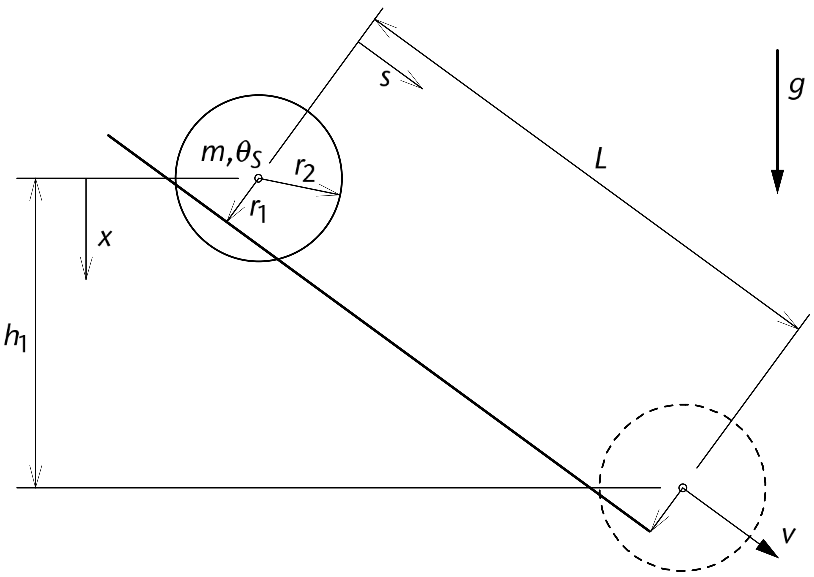
Skizziert wird hier die prinzipielle Vorgehensweise bei der Berechnung der einzelnen Bewegungsabschnitte (gerade Schiene, Schanzentisch, Flug). Der Schanzentisch wird nicht weiter betrachtet, da seine Ausführung den Teams überlassen ist.

Ball auf Winkelschiene

(Projizierter Berührpunkt Ball/Schiene nicht am Außendurchmesser)



Geschwindigkeit beim Verlassen der Schiene

Energiesatz:

$$E_{pot}\big|_1 = E_{kin}\big|_2 \quad \Rightarrow \quad mgh_1 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\theta_S\omega^2$$

Rollbedingung:

$$v = \omega r_1$$

$$\Rightarrow \quad mgh_1 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{\theta_S}{r_1^2}\right)v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2mgh_1}{m + \frac{\theta_S}{r_1^2}}}$$

Massenträgheitsmoment einer Kugel:

$$\theta_S = \frac{2}{5}mr_2^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2gh_1}{1 + \frac{2}{5}\frac{r_2^2}{r_1^2}}}$$

Beispielwerte für Golfball und gegebene Schiene:

$$r_2 = 21{,}34\text{mm}, \quad m = 45{,}93\text{g}, \quad r_1 \approx 15\text{mm}, \quad h_1 = 50cm \quad \Rightarrow \quad v = 2{,}33\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Zeit bis zum Verlassen der Schiene

Energiesatz für einen Punkt x auf der Schiene:

$$E_{pot}\big|_1 = E_{pot}\big|_3 + E_{kin}\big|_3 \quad \Rightarrow \quad mgh_1 = mg(h_1 - x) + \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + \frac{1}{2}\frac{\theta_S}{r_1^2}\dot{s}^2$$

Ableitung nach der Zeit:

$$0 = -mg\dot{x} + m\dot{s}\ddot{s} + \frac{\theta_S}{r_1^2}\dot{s}\ddot{s}$$

Neigung der Schiene:

$$\frac{s}{x} = \frac{L}{h_1} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{h_1}{L}s \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \frac{h_1}{L}\dot{s}$$

$$0 = -mg\frac{h_1}{L}\dot{s} + m\dot{s}\ddot{s} + \frac{\theta_S}{r_1^2}\dot{s}\ddot{s} \quad \Rightarrow \quad mg\frac{h_1}{L} = \left(m + \frac{\theta_S}{r_1^2}\right)\ddot{s}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{s} = \frac{mg\frac{h_1}{L}}{m + \frac{\theta_S}{r_1^2}} \quad \Rightarrow \quad \dot{s}(t) = \frac{mg\frac{h_1}{L}}{m + \frac{\theta_S}{r_1^2}}t = \frac{g\frac{h_1}{L}}{1 + \frac{2}{5}\frac{r_2^2}{r_1^2}}t$$

Für das Schienenende gilt:

$$\dot{s}(T_1) = v \quad \Rightarrow \quad \frac{g\frac{h_1}{L}}{1 + \frac{2}{5}\frac{r_2^2}{r_1^2}}T_1 = \sqrt{\frac{2gh_1}{1 + \frac{2}{5}\frac{r_2^2}{r_1^2}}}$$

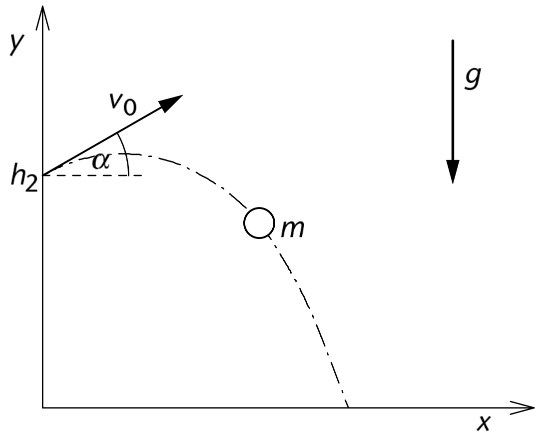
$$\Rightarrow \quad T_1 = \frac{\sqrt{\frac{2gh_1}{1 + \frac{2}{5}\frac{r_2^2}{r_1^2}}}}{\frac{1}{2L}\frac{2gh_1}{1 + \frac{2}{5}\frac{r_2^2}{r_1^2}}} = \frac{2L}{\sqrt{\frac{2gh_1}{1 + \frac{2}{5}\frac{r_2^2}{r_1^2}}}} = \frac{2L}{v}$$

Beispielwert für Golfball und gegebene Schiene:

$$L = 1{,}5\text{m} \quad \Rightarrow \quad T_1 = 1{,}29\text{s}$$

Flug

Neue Koordinaten:



Der (Golf-)ball wird im Punkt $(x=0,\, y=h_2)$ unter einem Winkel α mit der Geschwindigkeit v_0 gestartet.

Schwerpunktsatz

$$\begin{matrix} m\ddot{x}=0 \\ m\ddot{y}=-mg \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \dot{x}=v_0\cos(\alpha) \\ \dot{y}=-gt+v_0\sin(\alpha) \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x=v_0\cos(\alpha)t \\ y=-\frac{1}{2}gt^2+v_0\sin(\alpha)t+h_2 \end{matrix}$$

Auftreffen auf der *x*-Achse

$$y(T_2)=0=-\frac{1}{2}gT_2^2+v_0\sin(\alpha)T_2+h_2$$

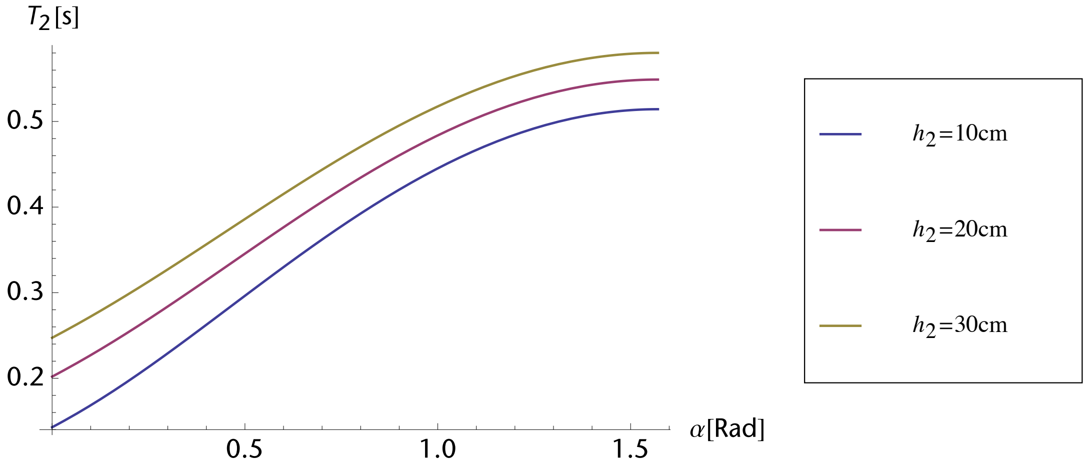
$$T_2^2-\frac{2v_0}{g}\sin(\alpha)T_2+\left(\frac{v_0}{g}\sin(\alpha)\right)^2=\frac{2h_2}{g}+\left(\frac{v_0}{g}\sin(\alpha)\right)^2$$

$$\left(T_2-\frac{v_0}{g}\sin(\alpha)\right)^2=\frac{2h_2}{g}+\left(\frac{v_0}{g}\sin(\alpha)\right)^2$$

$$T_2(\alpha)=\frac{v_0}{g}\sin(\alpha)+\sqrt{\frac{2h_2}{g}+\left(\frac{v_0}{g}\sin(\alpha)\right)^2}$$

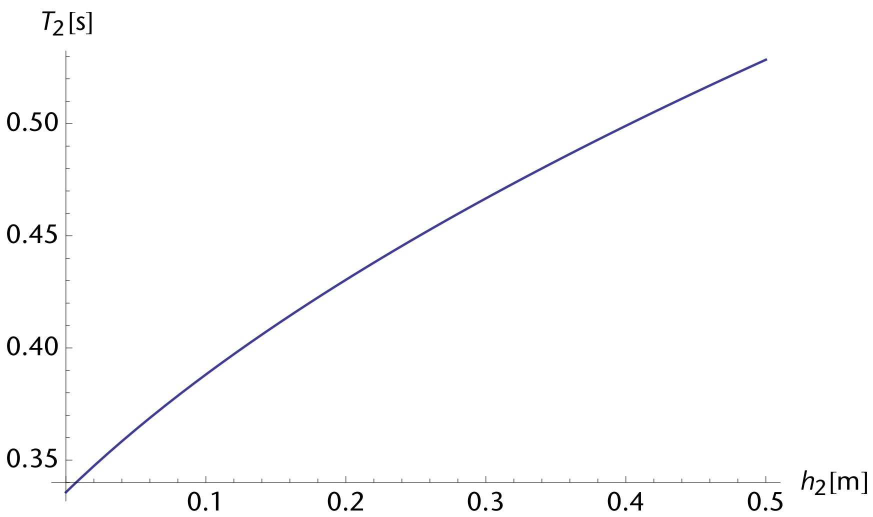
$$x(T_2)=v_0\cos(\alpha)T_2(\alpha)=v_0\cos(\alpha)\left(\frac{v_0}{g}\sin(\alpha)+\sqrt{\frac{2h_2}{g}+\left(\frac{v_0}{g}\sin(\alpha)\right)^2}\right)$$

Beispiel für Golfball mit den Anfangsbedingungen von oben:



$$\alpha = 45°, \quad h_2 = 20\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad T_2 = 0{,}43\,\text{s}$$

Sprungzeit in Abhängigkeit von der Absprunghöhe $(\alpha = 45°)$:



Maximale Sprungweite

Abkürzungen:

$$s(\alpha) := \frac{v_0}{g}\sin(\alpha) \qquad \lambda := \frac{2h_2}{g}$$

$$T_2(\alpha) = s(\alpha) + \sqrt{\lambda + (s(\alpha))^2}$$

$$x(T_2) = v_0 \cos(\alpha) T_2(\alpha)$$

$$w(\alpha) := \cos(\alpha) T_2(\alpha)$$

Extremwerte:

$$\frac{dw(\alpha)}{d\alpha} = -\sin(\alpha)T_2(\alpha) + \cos(\alpha)\frac{dT_2(\alpha)}{d\alpha} = 0$$

$$\tan(\alpha) = \frac{1}{T_2(\alpha)}\frac{dT_2(\alpha)}{d\alpha}$$

$$\frac{dT_2(\alpha)}{d\alpha} = \frac{ds(\alpha)}{d\alpha} + \frac{s(\alpha)\frac{ds(\alpha)}{d\alpha}}{\sqrt{\lambda + (s(\alpha))^2}} = \frac{ds(\alpha)}{d\alpha}\left(1 + \frac{s(\alpha)}{\sqrt{\lambda + (s(\alpha))^2}}\right)$$

$$\frac{dT_2(\alpha)}{d\alpha} = \frac{ds(\alpha)}{d\alpha}\left(1 + \frac{s(\alpha)}{T_2(\alpha) - s(\alpha)}\right) = \frac{ds(\alpha)}{d\alpha}\frac{T_2(\alpha)}{T_2(\alpha) - s(\alpha)}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{ds(\alpha)}{d\alpha}\frac{1}{T_2(\alpha) - s(\alpha)} = \frac{ds(\alpha)}{d\alpha}\frac{1}{\sqrt{\lambda + (s(\alpha))^2}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{v_0}{g}\frac{\cos(\alpha)}{\sqrt{\lambda + (s(\alpha))^2}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{v_0}{g}\frac{\cos(\alpha)}{\sqrt{\frac{2h_2}{g} + \left(\frac{v_0}{g}\sin(\alpha)\right)^2}} = \frac{\cos(\alpha)}{\sqrt{\frac{2gh_2}{v_0^2} + \sin^2(\alpha)}}$$

Damit wird die goniometrische Gleichung für maximalen Winkel

$$\frac{2gh_2}{v_0^2} =: k \qquad \boxed{\tan(\alpha) - \frac{\cos(\alpha)}{\sqrt{k + \sin^2(\alpha)}} = 0}$$

Optimaler Winkel für Absprung auf der x-Achse:

$$h_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 45^\circ$$

Optimaler Winkel für maximale Sprungweite bei beliebiger Absprunghöhe:

$$\sin(\alpha) = \frac{\cos^2(\alpha)}{\sqrt{k+\sin^2(\alpha)}} = \frac{1-\sin^2(\alpha)}{\sqrt{k+\sin^2(\alpha)}}$$

$$\sin(\alpha) =: s$$

$$s - \frac{1-s^2}{\sqrt{k+s^2}} = 0 \qquad s^2 = \frac{\left(1-s^2\right)^2}{k+s^2}$$

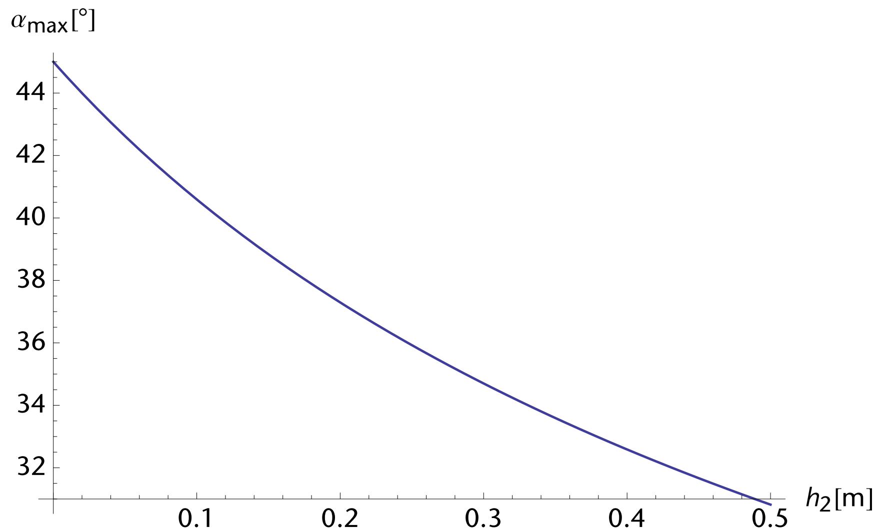
$$s^2\left(k+s^2\right) = \left(1-s^2\right)^2$$

$$s^4 + ks^2 = 1 - 2s^2 + s^4$$

$$ks^2 + 2s^2 = 1$$

$$\boxed{s = \frac{1}{\sqrt{2+k}}} \qquad \boxed{\alpha_{max} = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2+k}}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2+\frac{2gh_2}{v_0^2}}}\right)}$$

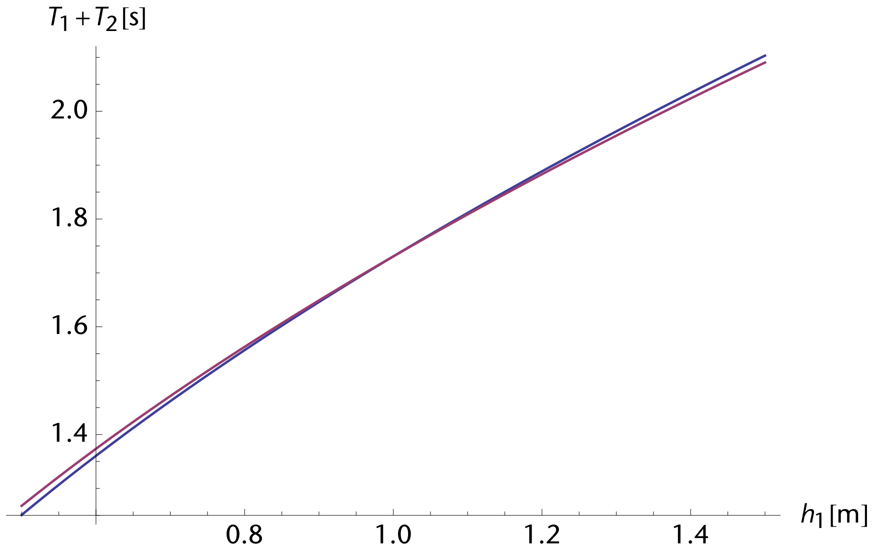
Beispiel für Anfangsbedingungen wie oben $(v_0 = v)$:



$$h_2 = 20\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad \alpha_{max} = 37{,}3°$$

Gesamtzeit (ohne Schanzentisch)

Verschiedene Schienenlängen bzw. Starthöhen ($h_2 = 20cm$, Neigungswinkel der Schiene 30°):



Blaue Kurve: Absprungwinkel optimal für $h_1 = 1$m

Lila Kurve: Absprungwinkel optimal für jede Höhe h_1

Sprungweite

Verschiedene Schienenlängen bzw. Starthöhen ($h_2 = 20cm$, Neigungswinkel der Schiene 30°, Absprungwinkel optimal für $h_1 = 1$m) :